

POTENCIANDO EL PENSAMIENTO VARIACIONAL DESDE GEOGEBRA

Carlos Del Mar López Piza¹

carlozpiza@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-9397-8143>

**Doctorando en Educación
Instituto Pedagógico Rural
"Gervasio Rubio" (IPRGR)
Venezuela**

Jadier Luna Aguilar²

jadierluna@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-7276-6746>

**Doctorando en Educación
Instituto Pedagógico Rural
"Gervasio Rubio" (IPRGR)
Venezuela**

Jorge Luis Sandoval Carvajal³

joteach90@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0009-0007-7676-4081>

**Doctorando en Educación
Instituto Pedagógico Rural
"Gervasio Rubio" (IPRGR)
Venezuela**

Recibido: 17/11/2025

Aprobado: 28/11/2025

RESUMEN

A partir de la experiencia educativa y los resultados de pruebas externas en el Colegio Integrado San José, ubicado en contexto rural de la municipalidad de Cimitarra, Santander, se diseñó e implementó un plan operativo para mejorar el desempeño académico de los estudiantes en el área de matemáticas, con especial énfasis en el pensamiento variacional. Para ello, se llevó a cabo una investigación cuantitativa que introdujo una estrategia didáctica mediante el uso del software libre GeoGebra con el

¹ Formación docente en pregrado y postgrado. Desarrollo laboral en el área de la docencia. Doctorando en educación.

² Formación docente en pregrado y postgrado. Desarrollo laboral en el área de la docencia. Doctorando en educación.

³ Formación docente en pregrado y postgrado. Desarrollo laboral en el área de la docencia. Doctorando en educación.

propósito de mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje. Se creó un aula virtual en GeoGebra en la que, los estudiantes del grado décimo realizaron cuatro actividades teórico-prácticas bajo la supervisión del docente investigador. En primera instancia, se implementó una prueba diagnóstica para establecer el nivel inicial de los estudiantes. Tras la implementación del software como estrategia de estudio dentro del aula, se aplicó una prueba postest para evaluar la variación en el rendimiento académico. El análisis comparativo reveló un incremento del rendimiento promedio del grupo, que incrementó de 2.34 a 3.02 en una escala de 5.0, lo que equivale a una mejora sustancial del 29%. Estos resultados demuestran que, la integración didáctica de GeoGebra en el aula contribuyó de manera significativa al desarrollo del pensamiento variacional en los estudiantes de décimo grado en la mencionada institución educativa, específicamente en las competencias de dominio conceptual y análisis gráfico. Asimismo, se pudo evidenciar que la competencia de resolución de problemas tuvo una variación prácticamente nula entre las pruebas pretest y postest.

Palabras clave: Pensamiento variacional, ecuaciones, GeoGebra, aprendizaje significativo, constructivismo.

ENHANCING VARIATIONAL THINKING WITH GEOGEBRA

ABSTRACT

Based on the experience inside the classroom, the academic performance and the results of external tests, at the San José Integrated School, located in Puerto Araujo town which belong to Cimitarra municipality in Santander department, a didactic strategy was designed and implemented in order to improve students' academic performance at maths area, and specifically, in variational thinking ability.

This is the reason this research is being done, where a didactic strategy was executed, using the free software GeoGebra, seeking to improve the teaching/learning process of the students involved, which will lead them to obtain better results in their study of mathematics. For this purpose, a virtual classroom was designed, through GeoGebra, where the pupils worked four activities of a theoretical-practical type with the constant supervision and tutoring of the research teacher.

Initially, a diagnostic test was implemented to establish the students' initial level. After the implementation of the software as a study strategy within the class room, a post test was applied to evaluate the variation in academic performance. The comparative analysis revealed in the group's average performance, which rose from 2.34 to 3.02 on a 5.0 scale,

equivalent to a substantial improvement of 29%. These results demonstrate that the didactic integration of GeoGebra in the class room significantly contributed to the development of variational thinking in tenth grade students at the mentioned educational institution

Keywords: Variational thinking, equations, GeoGebra, meaningful learning, constructivism.

INTRODUCCIÓN

Las matemáticas son un soporte esencial, en todos los aspectos de la sociedad, ya que se encuentra inmersa en diversos contextos y ámbitos, del mundo actual. Por lo anterior, es necesario una transición en la enseñanza de las matemáticas de un modelo mecanicista y repetitivo a un modelo dinámico donde cada aprendiz pueda producir su propio conocimiento basándose en los conocimientos previos y en sus experiencias dentro del entorno. Para esto, se deben aprovechar las habilidades de los llamados “nativos digitales” en el uso de las herramientas TIC y evolucionar a métodos de enseñanza donde se dinamicen los conceptos matemáticos y se estudien desde los diversos puntos de vista que puedan proponer los estudiantes, logrando así la apropiación de los conceptos por parte de estos y dejando atrás los procesos mecánicos de repetición.

De acuerdo con esto, GeoGebra representa el grupo de herramientas TIC que, permiten recrear los concepto y conocimiento matemáticos en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, logrando así dinamizar este último. Con

esto se logra dar cumplimiento a las directrices del MEN (2006), donde afirma que se debe implementar "entornos de aprendizaje que se enriquecen con situaciones problemáticas relevantes y comprensibles, lo que permite el progreso hacia niveles cada vez más complejos de competencia" (p. 49).

El municipio de Cimitarra es el segundo municipio más extenso de Colombia y está localizado en Santander. En el ámbito escolar, en particular en la asignatura de matemáticas, las instituciones educativas rurales del departamento tienen un 49% de alumnos con niveles de rendimiento básico o bajo. Esta cifra es mucho menor que la media general del departamento y también que la de los centros educativos oficiales del sector urbano de acuerdo con las pruebas de estado Saber Icfes.

Esta propuesta investigativa se desarrolla con el fin de vigorizar los procesos de enseñanza y aprendizaje, y mejorar el desarrollo del pensamiento variacional mediante la implementación de una estrategia didáctica haciendo uso de la GeoGebra, direccionada hacia los estudiantes del grado décimo del Colegio integrado San José. De esta forma se espera mejorar la motivación, aprendizaje y la comunicación entre los estudiantes; a su vez facilitar la apropiación de esta herramienta offline por parte de los estudiantes para el estudio gráfico de diversas funciones. Finalmente, se espera que el presente proyecto sirva como punto de partida para la inclusión de las TIC en el ámbito escolar de la I.E Colegio integrado San José (COLISAJO), con el fin realizar a futuro una inclusión curricular de dichas herramientas.

MARCO TEÓRICO

El ser humano ha progresado en todas las facetas de la humanidad por la búsqueda de hacer de su vida lo más sencilla posible, por lo menos en cuanto a su confort. Por consiguiente, siempre centro sus esfuerzos en suplir las necesidades que de a poco iban surgiendo, lo que se transforma en la solución de problemas cotidianos; y es allí donde ve en las matemáticas, las herramientas necesarias para dar solución a sus inconvenientes.

Las matemáticas, han demostrado a través del tiempo la importancia de tener un dominio mínimo de las mismas, puesto que estas están inmersas en todos los ámbitos del diario vivir; la salud, la construcción, el turismo, la tecnología, y claramente la educación, entre otros. Por lo anterior se hace necesario el estudio de esta área fundamental, y así mismo, cada uno de sus pensamientos, entre ellos el pensamiento variacional.

PENSAMIENTO VARIACIONAL

El pensamiento variacional, y por ende las funciones, son herramientas necesarias para el análisis, comprensión e interpretación de diversas situaciones, en donde se evidencian variaciones de la información, haciendo uso de datos, gráficos y

patrones de comportamiento, con lo cual se hace uso y mejoramiento de habilidades como el análisis crítico, el razonamiento y la lógica.

Vasco, C.E. (2003), afirma que, “El pensamiento variacional puede describirse aproximadamente como una manera de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas, de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad. (p. 6)”

En esta línea, el empleo de representaciones mentales junto con la lógica matemática, son herramientas que aportan al estudiante, el fortalecimiento del pensamiento matemático; estudiando datos para analizar y predecir patrones de comportamiento, para materializar las observaciones de dichas variaciones, en gráficos, comportamientos numéricos, sucesiones, entre otros. Acorde a esto, el mismo Vasco, C.E (2003) dijo, “El movimiento mental de este pensamiento tiene pues un momento de captación de lo que cambia y de lo que permanece constante y de los patrones que se repiten en ciertos procesos, como los cambios de temperatura durante el día y la noche, de los movimientos de caída libre o tiro parabólico; luego tiene un momento de producción de sistemas mentales cuyas variables internas interactúen de manera que reproduzcan con alguna aproximación las covariaciones detectadas, sistemas que podemos llamar modelos mentales”. (p. 6)

Este pensamiento, requiere y fortalece el uso de dichos modelos mentales, desarrollando así destrezas como el criterio propio, la comparación, y el modelado

matemático; herramientas que también son aplicables a los demás pensamientos matemáticos (numérico, espacial, métrico o de medida, aleatorio o probabilístico) y a su vez a las demás áreas del conocimiento, incluyendo diversos contextos no académicos, como lo es el diario vivir del estudiante. Piaget sostiene que "los niños construyen activamente el conocimiento de su entorno a través de la utilización de lo que ya conocen y la interpretación de nuevos objetos y hechos" (p.4). Por tanto, el pensamiento variacional de cada persona podrá ir evolucionando acorde a sus propias experiencias y siempre estará en función de su conocimiento previo, que a su vez son cambiantes en el tiempo, a medida que va adquiriendo sabiduría.

TEORÍAS DEL APRENDIZAJE APLICADAS A LA ENSEÑANZA DEL ÁLGEBRA

La instrucción del álgebra se basa en varias teorías del aprendizaje que enfatizan el rol activo del aprendiz en la edificación de su saber. Siguiendo la teoría constructivista de Piaget (1976), el aprendizaje de las matemáticas conlleva que la persona reestructure sus esquemas cognitivos de manera constante mediante la interacción con objetos y problemas del conocimiento. A través de actividades que exigen explorar, argumentar y resolver problemas, el estudiante genera significados sobre las variables, las relaciones y las funciones durante este proceso. Las investigaciones actuales sostienen esta perspectiva, señalando que la comprensión algebraica se desarrolla poco a poco cuando

se crean tareas que favorecen la coordinación y reflexión entre distintos tipos de representación (Kaput, 2008; Kieran, 2004). Por lo tanto, la instrucción del álgebra debe considerarse como un proceso dinámico y en desarrollo, en el que los alumnos modifican sus esquemas anteriores para crear nuevos significados matemáticos.

Además, la visión sociocultural de Vygotsky (1978) enfatiza que el aprendizaje es un proceso social que se realiza a través de instrumentos culturales, cooperación y lenguaje. Ideas algebraicas que necesitan un apoyo pedagógico cuidadoso son introducidas por conceptos como la zona de desarrollo próximo (ZDP) y el andamiaje, las cuales guían el trabajo de los docentes. Las nociones de variable o función no se entienden por sí solas, sino que requieren el acompañamiento de un experto para que el alumno progrese hacia formas más abstractas de razonamiento (Wood, Bruner & Ross, 1976). En esta línea, el intercambio con los compañeros, las discusiones grupales y la solución colaborativa de dificultades refuerzan la apropiación conceptual. Esto concuerda con estudios que destacan la importancia de las prácticas discursivas y del razonamiento para aprender álgebra (Sfard, 2008). Por lo tanto, la dimensión social y mediada de las matemáticas es crucial para crear significados funcionales.

El aprendizaje significativo, según Ausubel (1983), afirma que conocimientos nuevos se adhieren de forma estable solamente cuando se integran en la estructura cognitiva del alumno mediante saberes previos significativos. En el campo del álgebra, esto supone vincular conceptos como la proporcionalidad, la variación y los patrones numéricos con el análisis formal de expresiones simbólicas y funciones (Hitt &

Thompson, 2010). El maestro debe reconocer lo que los alumnos saben de antemano y crear actividades que activen estos esquemas preexistentes para promover una comprensión más profunda. Las TIC son un factor relevante en este proceso, ya que posibilitan la visualización de conexiones entre representaciones gráficas, tabulares y simbólicas. De esta manera, conceptos abstractos que serían difíciles de asimilar por otros medios se vuelven más accesibles (Hegedus & Kaput, 2012). Así, el aprendizaje significativo se vuelve un marco poderoso para guiar la enseñanza del álgebra con la ayuda de tecnología.

Para concluir, el enfoque de los micromundos digitales y la teoría de "seres humanos con medios" de Borba y Villarreal (2005) sostiene que los instrumentos tecnológicos no solo simplifican la enseñanza, sino que también alteran el propio carácter del pensamiento matemático. Desde esta perspectiva, el alumno genera conocimiento interactuando con un entorno, en este caso GeoGebra y otros entornos digitales, que expande sus capacidades de razonamiento, acción y exploración. Los micromundos matemáticos posibilitan la manipulación de objetos, la visualización de transformaciones y la experimentación con conjeturas en tiempo real, lo cual produce nuevos métodos para entender ideas algebraicas y funcionales (Drijvers, 2016; Laborde, 2002). Este punto de vista es esencial para justificar didácticamente el empleo de tecnología dinámica, pues evidencia que la interacción con instrumentos digitales no solo favorece el aprendizaje, sino también reestructura la manera en que los estudiantes piensan y representan las matemáticas.

TIC EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

La adopción de las TIC en la enseñanza de las matemáticas ha generado un cambio radical en los métodos pedagógicos, ya que permite que el conocimiento matemático sea representado, explorado y comunicado de maneras novedosas. El empleo deliberado de herramientas digitales ayuda a entender conceptos, particularmente en asuntos que históricamente han sido problemáticos, como el álgebra y las funciones, según varias investigaciones (Hegedus & Kaput, 2012; Drijvers, 2016). Las TIC posibilitan que los alumnos interactúen con objetos matemáticos dinámicos, vean fenómenos de cambio y generen significados al manipular directamente representaciones. Esto refuerza los procesos cognitivos vinculados con el razonamiento algebraico y funcional.

No obstante, los impactos favorables de las TIC no se limitan a la disponibilidad tecnológica, sino que también dependen del diseño pedagógico que guía su uso. Según Drijvers, Doorman y Gravemeijer (2014), para integrar la tecnología de manera efectiva es necesario combinar las tareas matemáticas, la mediación del docente y las oportunidades de exploración que brindan los ambientes digitales. Cuando la tecnología se emplea sin un enfoque pedagógico definido, su efecto en el aprendizaje suele ser escaso o poco profundo. Por otro lado, los estudios indican que la aplicación de TIC en secuencias meticulosamente elaboradas propicia procesos de argumentación, análisis

funcional y modelado matemático (Pierce & Stacey, 2010), lo cual fomenta aprendizajes más sólidos y perdurables.

Además, las TIC son esenciales para el perfeccionamiento del pensamiento variacional porque hacen posible que se contemple simultáneamente la manera en que dos o más magnitudes cambian y cómo esa variación se refleja en varios registros. Para entender la covariación entre variables (Thompson & Carlson, 2017; Johnson, 2015), es fundamental la implementación de herramientas como simuladores, software de geometría dinámica y entornos algebraicos, que permiten el tránsito entre representaciones gráficas, tabulares y simbólicas. Bajo esta óptica, las TIC no funcionan únicamente como recursos de soporte, sino también como intermediarios cognitivos que posibilitan la creación de relaciones matemáticas complejas a través de la visualización y la experimentación.

GEOGEBRA COMO HERRAMIENTA DIDÁCTICA PARA EL ÁLGEBRA Y EL PENSAMIENTO VARIACIONAL

Gracias a su habilidad para unificar en un solo espacio representaciones algebraicas, gráficas, tabulares y geométricas, GeoGebra se ha fortalecido como una de las herramientas digitales más importantes en la enseñanza matemática actual. Esta articulación multirrepresentacional posibilita que los alumnos examinen de manera dinámica las relaciones funcionales, estudien cómo se comportan las variables y

establezcan nexos entre gráficos y expresiones simbólicas (Hohenwarter & Preiner, 2007). Los estudios realizados en el campo de la educación matemática han evidenciado que esta integración favorece el entendimiento de conceptos abstractos del álgebra, debido a que es posible manipular objetos y ver los resultados de las modificaciones en los parámetros al instante gracias al software. Esto propicia la formulación de conjeturas y el razonamiento algebraico (Zulnaidi & Zakaria, 2012; Kwon, 2017).

GeoGebra contribuye a la creación del pensamiento variacional, lo que demuestra su potencial pedagógico, ya que posibilita observar al mismo tiempo cómo varían dos o más magnitudes. Investigaciones como las de Castrillón, Villa-Ochoa y Castro (2018) han demostrado que los alumnos pueden analizar tendencias, reconocer patrones de cambio y entender la relación funcional desde un punto de vista más profundo y contextualizado gracias a las representaciones dinámicas producidas en este ambiente. León-Salinas (2017) también documenta que el empleo de GeoGebra mejora la habilidad del estudiante para interpretar gráficos, crear modelos y asociar la variación con estructuras algebraicas, lo cual favorece el paso entre registros representacionales. En este sentido, GeoGebra se convierte en un facilitador cognitivo que potencia el razonamiento variacional, además de ser una herramienta tecnológica.

GeoGebra no es meramente una herramienta de apoyo, sino un agente que reestructura la manera en que los alumnos se relacionan con el saber matemático, aumentando su capacidad de exploración y expresión. Esto también es perceptible desde la perspectiva de los micromundos digitales y la teoría de "seres humanos con

medios" propuesta por Villarreal y Borba (2005). El software, al posibilitar la manipulación de objetos matemáticos y la obtención de retroalimentación instantánea, crea un ambiente propicio para experimentar, ensayar y comprobar hipótesis, aspectos esenciales para desarrollar conceptos algebraicos y funcionales (Laborde, 2002; Drijvers, 2016). No obstante, como indican Boon, Drijvers y van Reeuwijk (2019), el efecto educativo de estas tecnologías está en gran parte condicionado por la mediación docente, el bosquejo de tareas y la vinculación lógica con los propósitos de aprendizaje. Esto resalta la importancia de plantear propuestas pedagógicas bien estructuradas.

DISEÑO METODOLÓGICO

Este estudio es de naturaleza cuantitativa. Partiendo de una entrevista previa que permita identificar las posibles respuestas a preguntas como: ¿por qué tan bajo rendimiento?, ¿cuáles son los motivos de la pérdida escolar?, ¿qué estrategias se pueden llevar a cabo para mejorar?, basado en un diseño descriptivo correlacional. Este tipo de investigación posibilitará establecer el nivel de semejanza y conexión entre dos o más variables, lo que significa entre los conceptos o las características de un fenómeno. Del mismo modo, se quiere mejorar el rendimiento académico de la población objeto junto con sus variaciones en función del proceso investigativo, y el nivel de dispersión que se pueda llegar a alcanzar el grupo al momento de aplicar las diversas actividades dentro de la investigación.

POBLACIÓN

La población objeto de estudio son los estudiantes del grado décimo de la Institución educativa Colegio Integrado San José, los cuales son 26 individuos; se seleccionó aleatoriamente una muestra de 24 alumnos, calculada a partir del tamaño de la población, con un margen de error del 5% y un nivel de confianza del 90%.

$N = 26$ *estudiantes.*

$Z = 1,95$ *(para 95% de confianza).*

$e = 0,05$ *(equivale a 5% de error, el máximo permitido).*

$p = 0,5$ *puesto que cada estudiante tiene la misma probabilidad de ser elegido.*

n será el tamaño de la muestra.

$$n = \frac{N * Z^2 * p * (1 - p)}{(N - 1) * e^2 + Z^2 * p * (1 - p)}$$

PROCEDIMIENTO

Así se identifican las diferentes fases en las que se estructura el proyecto de investigación.

SÍNTESIS FASE DIAGNÓSTICA

El análisis de los instrumentos de la fase diagnóstica brinda las pautas para contrucción de las actividades de desarrollo del pensamiento variacional. El diseño de las actividades a implementar se muestra a continuación:

Tabla 1. Diseño de unidades temáticas.

Competencias para desarrollar • Competencia comunicativa y digital • Capacidad para identificar magnitudes que varían en una situación problema. • Reconocimiento de patrones de cambio. • Representación de variaciones haciendo uso de tabulación y plano cartesiano. • Modelar fenómenos cotidianos que involucren el cambio de una magnitud. • Plantar y resolver problemas que involucren el estudio de variación. • Expresar con claridad información sobre variación.	
Resultados de aprendizaje relacionados • El estudiante tiene la capacidad de identificar tipos de variables y razones de cambio. • El estudiante posee capacidad de análisis de graficas. • El estudiante tiene capacidad para analizar tablas de valores. • El estudiante posee capacidad para analizar situaciones problema y resolverlas.	
Temática	Instrumento de valoración
• Funciones • Definición de función • Tipos de funciones. • Variable dependiente. • Variable independiente.	• Quiz 1. • Prueba postest.

PORTAFOLIO DE INVESTIGACION

• Función de primer grado • Función creciente y decreciente. • Pendiente y razón de cambio. • Punto de cortos de corte. • Análisis gráfico. • Situaciones problema.	• Quiz 2. • Prueba postest.
• Función de segundo grado • Forma estándar $ax^2 + bx + c$. • Tipos de apertura. • Vértice y sus coordenadas. • Eje de simetría. • Análisis gráfico. • Situaciones problema.	• Quiz 1. • Prueba postest.

Fuente: Elaboración propia de los autores.

ETAPA DE IMPLEMENTACIÓN GEOGEBRA

Durante la presente etapa se procede a implementar el uso del software libre GeoGebra dentro de las clases de matemáticas de décimo grado. En este caso, se trabaja cuatro unidades didácticas correspondientes a las funciones mostradas en la tabla anterior. Primera actividad, guía de trabajo inicial para conocer el entorno de GeoGebra, se programa para una duración de dos horas de clase, mientras que las demás guías de trabajo se realizarán en dos sesiones de dos horas de clase, siempre bajo el acompañamiento y supervisión del docente investigador y mediante trabajo

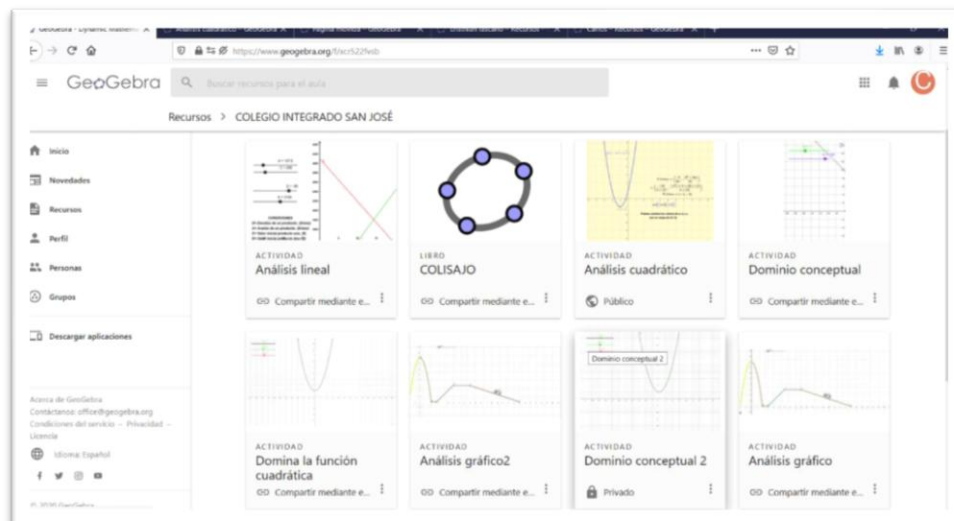
colaborativo con sus pares. Finalmente, la prueba postest se lleva a cabo en una sesión de dos horas de clase y de forma individual.

Las actividades mencionadas podrán aplicarse bien sea trabajando en línea desde la página de GeoGebra o descargando la actividad interactiva y hacerlo desde la aplicación instalada en el computador.

Ingreso al aula virtual

Para ingresar al aula cada estudiante deberá ingresar mediante el enlace <https://www.geogebra.org/> y buscar el libro de trabajo llamado COLISAJO.

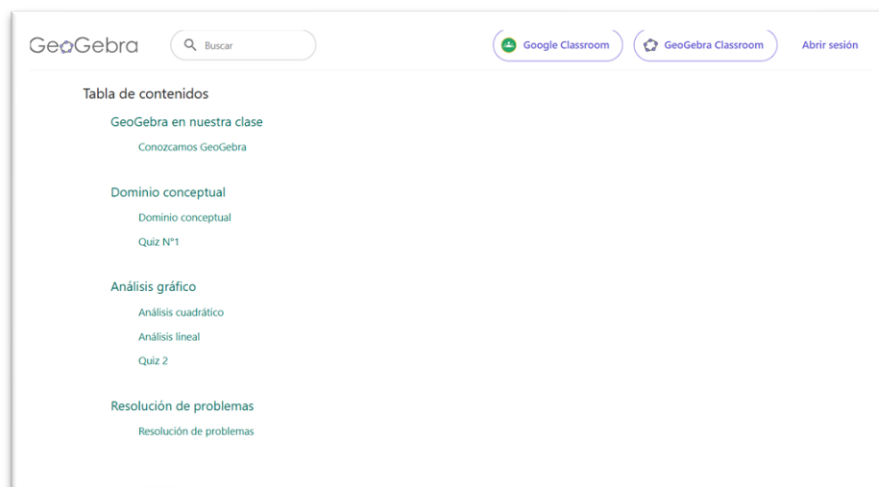
Figura 1. Página principal del libro de trabajo.



Fuente: Elaboración propia de los autores.

Allí mediante las indicaciones del docente deberá ingresar al libro para realizar las diferentes actividades propuestas creadas para la presente investigación, de acuerdo con las indicaciones dadas.

Figura 2. Tabla de contenido de actividades



Fuente: Elaboración propia de los autores.

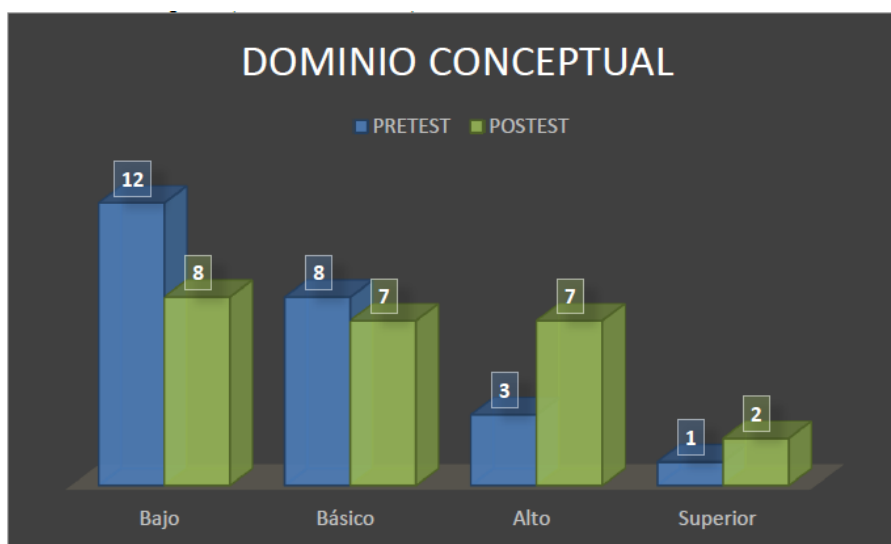
ETAPA DE EVALUACIÓN

Para finalizar la propuesta pedagógica se llevará a cabo una prueba final, donde los estudiantes del grado decimo pondrán a prueba los conocimientos adquiridos acerca del pensamiento variacional mediante el uso de GeoGebra aplicado en ecuaciones de primer y segundo grado.

RESULTADOS

La validación de la investigación se realizó mediante una prueba final de 15 preguntas sobre el pensamiento variacional que se dividió en tres competencias, dominio conceptual, análisis gráfico y resolución de problemas; cuyos resultados se muestran a continuación:

Figura 3. Dominio conceptual por niveles de desempeño.

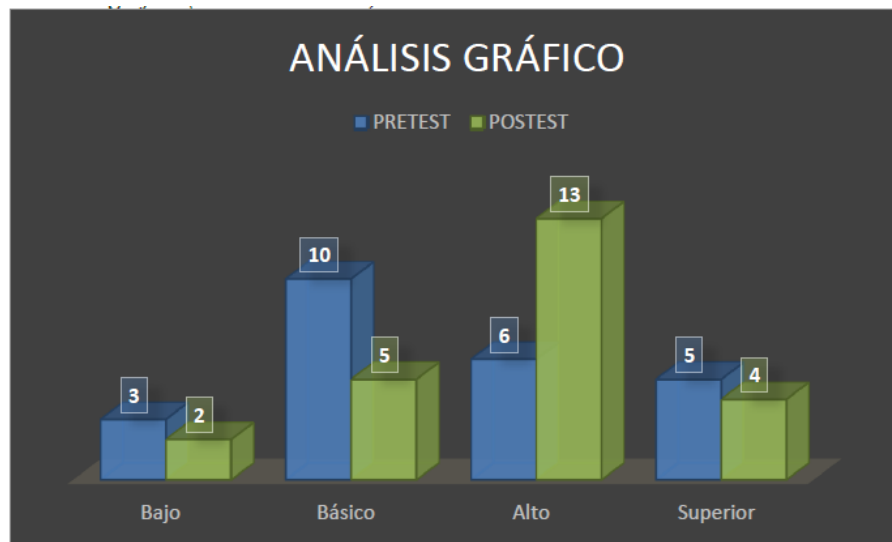


Fuente: Elaboración propia de los autores.

Observando la gráfica 3 se evidencia que, la transición del desempeño académico en la competencia de Dominio conceptual entre el pretest y posttest se comportó de una forma parabólica convexa con un eje de simetría entre los niveles básico y alto; lo cual quiere decir, que los niveles bajo y básico perdieron estudiantes, que se trasladaron hacia

los niveles alto y superior, lo cual significó un movimiento del 21% de los estudiantes de los niveles inferiores hacia los niveles sobresalientes.

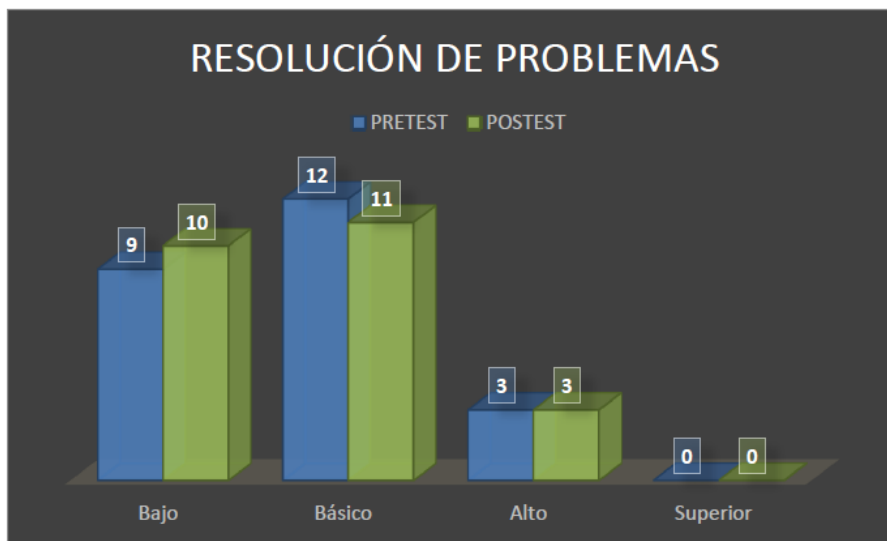
Figura 4. Análisis gráfico por niveles de desempeño.



Fuente: Elaboración propia de los autores.

Detallando la figura anterior se evidencia que, la variación del desempeño académico en la competencia de Análisis gráfico desde el pretest hacia el postest, al igual que en la anterior competencia, fue enriquecedora para el rendimiento académico de los estudiantes, dado que, los niveles bajo y básico perdieron el 33% y 50% de sus estudiantes respectivamente lo cual corresponde a 6 estudiantes que se ubicaron en los niveles alto y superior, generando un aumento global de 25% en estos últimos niveles.

Figura 5. Análisis gráfico por niveles de desempeño.



Fuente: Elaboración propia de los autores.

Analizando la figura 5 se refleja que, la competencia de Resolución de problemas es notoriamente la de menor mejoría, luego de la aplicación de la propuesta pedagógica, ya que, la cantidad de estudiantes en los niveles alto y superior no, mientras que en el nivel de desempeño básico perdió a un estudiante que se ubicó en el nivel bajo. En esta competencia en particular, en la aplicación de las dos pruebas, el 88% de los estudiantes se mantuvo entre los niveles bajo y básico.

Los anteriores indicadores, evidencian que la implementación de la estrategia didáctica influida por el uso de GeoGebra dentro del aula de clase mejoró el rendimiento académico de la muestra experimental. Sin embargo, estos datos fueron sometidos a una prueba de validación (T student) con el propósito de comprobar la credibilidad de los

resultados logrados, mediante el método de comparación de medias aritméticas de las pruebas pretest y posttest.

Figura 6. Muestras para prueba T student.

Estadísticos de muestras relacionadas					
		Media	N	Desviación típ.	Error típ. de la media
Par 1	pretest	2.354	24	.8140	.1662
	posttest	3.017	24	.7949	.1623

Fuente: Elaboración propia de los autores.

Figura 7. Resultados prueba T student.

Prueba de muestras relacionadas									
		Diferencias relacionadas				t	gl	Sig. (bilateral)	
		Media	Desviación típ.	Error típ. de la media	95% intervalo de confianza para la diferencia				
					Inferior				Superior
Par 1	pretest - posttest	-.6625	.4147	.0847	-.8376	-.4874	-7.826	23	.000

Fuente: Elaboración propia de los autores.

Acorde con el resultado de la prueba T student, al comparar el valor de la significancia con el margen de error permitido del 5%; se evidencia que, $\text{Sig} \leq 0,05$, con lo cual queda en firme la validez de los resultados obtenidos.

CONCLUSIONES

- Tras la implementación de la investigación actual, se logró identificar las dificultades planteadas en la descripción del problema mediante la aplicación de la prueba pretest debido a que, en los resultados de esta se evidenció un rendimiento insuficiente del grupo en general puesto que la media durante la prueba fue de 2.4 en una escala de 5.0, lo cual indica un nivel de desempeño bajo. Aun así, cabe destacar que, analizando el resultado por aptitudes se observó en las competencias resolución de problemas y dominio conceptual clasificarse al 13% y 17% respectivamente de los estudiantes en los niveles alto o superior; mientras que en la competencia análisis gráfico el 45% de la muestra experimental se ubicó en uno u otro de los niveles de desempeño mencionados, siendo esta última la menos rezagada entre las tres competencias evaluadas. En consecuencia, el diseño e implementación de la propuesta investigativa, se llevó a cabo siguiendo los parámetros tanto institucionales como gubernamentales. Asimismo, este proceso tuvo la aprobación inicial del 87% de los estudiantes, quienes afirmaron que, quisieran involucran las herramientas TIC dentro de su proceso pedagógico al momento del pretest; por otro lado, durante la implementación, el 100% de los estudiantes mostraron empatía con la didáctica adoptada, incluyendo aquellos que inicialmente no quería el uso de las TIC, y quienes presentaban dificultades al usar las herramientas tecnológicas.

- Como resultado de lo que se ha presentado en este proyecto, se logró el diseño de actividades didácticas mediante el uso de GeoGebra, teniendo en cuenta los resultados del diagnóstico inicial, donde se observó cierta facilidad por parte del grupo de estudio para absorber la información expuesta gráficamente. Por ende, se diseñaron actividades basadas e información gráfica con el fin de explotar una condición identificada con el estudio inicial de las condiciones de los estudiantes.
- Finalmente, analizando la progresión del promedio estudiantil durante las pruebas, desde el pretest (2.35) hacia el posttest (3.02); es posible deducir que la puesta en práctica de la estrategia orientada con el software GeoGebra en décimo grado del Colegio Integrado San José, sí generó un impacto significativo en la mejora del pensamiento variacional, específicamente en el desarrollo de funciones de primer y segundo grado. Durante la implementación del proceso didáctico mediado por las TIC, aplicando el software GeoGebra en el aula, se simplificó el acceso a la información mejorando el proceso formativo de los estudiantes del grado décimo, debido a la mejoría en el trabajo colaborativo y relaciones interpersonales entre los jóvenes, la comunicación de los estudiantes con sus pares y con el docente y el ambiente de trabajo dentro del aula. De igual modo, institucionalmente hablando, se demostró a la comunidad educativa, específicamente a las partes involucradas que, el uso de las herramientas tecnológicas dentro de los límites de la institución no es netamente perjudiciales cómo lo considera gran parte de colectividad; por el contrario, gracias a su utilidad, se mejoran

problemáticas dentro del aula, como lo es las relaciones interpersonales, motivación estudiantil, entre otras.

- Basándose en los hallazgos de la investigación, se propone iniciar la vinculación activa de herramientas TIC en el área de matemáticas para estimular el interés y la curiosidad del estudiantado mediante el uso de la tecnología en el aula; además, se sugiere recopilar actividades pedagógicas elaboradas con GeoGebra para conformar un banco didáctico que fortalezca el proceso educativo. Del mismo modo, se plantea promover el uso transversal de herramientas tecnológicas en diversas áreas del conocimiento, fomentando la integración entre informática y otras asignaturas. Conforme mejoren las condiciones de conectividad de la institución, podría implementarse un aula virtual mediante blogs o plataformas digitales gratuitas como recurso de apoyo para estudiantes y la comunidad educativa. Finalmente, se recomienda adaptar la propuesta a otros grados para realizar nuevos estudios de impacto que permitan comparar resultados y valorar la viabilidad de incorporar las TIC en el PEI institucional.

REFERENCIAS

- Acevedo, D., López, A., Guerrero, Y., & Morales, L. (2013). La fracción parte-todo a través de una mirada gráfica. <http://funes.uniandes.edu.co/6643/1/Morales2013Fraccion.pdf>
- Aguaded, I., & Cabero Almenara, J. (2014). Avances y retos en la promoción de la innovación didáctica con las tecnologías emergentes e interactivas. *Educator*, 50. Recuperado por: <http://educar.uab.cat/article/view/v50-esp-aguaded-cabero/pdf-es>
- Amestoy de Sánchez, M. (2002). La investigación sobre el desarrollo y la enseñanza de las habilidades de pensamiento. *Revista electrónica de investigación educativa*. http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1607-40412002000100010
- Ausubel, D. P. (1976/1983). *Teoría del aprendizaje significativo*. Trillas.
- Borba, M. C., & Villarreal, M. (2005). *Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking*. Springer.
- Drijvers, P. (2016). Digital technology in mathematics education: Why it works (or doesn't). In *Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 7–20). PME.
- Drijvers, P., Boon, P., & van Reeuwijk, M. (2019). Digital resources supporting mathematics teaching and learning. *ZDM Mathematics Education*, 51(1), 1–12.
- Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., van Reeuwijk, M., & Gravemeijer, K. (2014). Digital resources inviting changes in mid-school mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, 46(7), 1119–1131.
- Fiallo, J. E. (2015). Acerca de la investigación en educación matemática desde las tecnologías de la información y la comunicación. <http://revistas.ufps.edu.co/ojs/index.php/ecomatematico/article/view/453>
- Hegedus, S. J., & Kaput, J. J. (2012). The impact of technology-enhanced curriculum on student learning within algebra. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 31(2), 113–146.

- Hernández Campier, R., Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, P. (2010). Metodología de la investigación. Recuperado de: <http://dspace.ucbscz.edu.bo/dspace/bitstream/123456789/21401/1/11699.pdf>
- Hernández, R. (2014). La práctica pedagógica de la matemática: el caso de profesores exitosos en Educación Secundaria. Revista de Investigación Educativa de la REDIECH. <http://www.redalyc.org/service/redalyc/downloadPdf/5216/521651962008/6>
- Hitt, F., & Thompson, P. W. (2010). Teaching and learning algebra: Issues and perspectives. Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education. Springer.
- Hohenwarter, M., & Preiner, J. (2007). Dynamic mathematics with GeoGebra. Journal of Online Mathematics and Its Applications, 7, Article 1448.
- Johnson, H. L. (2015). Secondary students' reasoning about variation in contextual situations. Journal of Mathematical Behavior, 38, 1–10.
- Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), Algebra in the early grades (pp. 5–17). Lawrence Erlbaum.
- Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? The Mathematics Educator, 8(1), 139–151.
- Kwon, O. N. (2017). The use of GeoGebra for teaching and learning functions in South Korea. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 48(2), 215–226.
- Laborde, C. (2002). Integration of technology in the design of geometry tasks with Cabri-Geometry. International Journal of Computers for Mathematical Learning, 6(3), 283–317.
- León-Salinas, C. E. (2017). Desarrollo del pensamiento covariacional a través del uso de GeoGebra. Revista Científica, 28(2), 150–162.
- Ley N° 115. (1994). Expedición Ley General de Educación. Diario Oficial de la República N°. 41.214 del 8 de febrero de 1994. Bogotá, Colombia. https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-85906_archivo_pdf.pdf
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. (1998). Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Recuperado de: https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf

- Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura, (2013). Enfoques estratégicos sobre las TICS en educación en América Latina y el Caribe. Recuperado de <http://www.unesco.org/new/fileadmin/MULTIMEDIA/FIELD/Santiago/images/ticsesp.pdf>
- Piaget, J., & Vygotsky, L. (2012). Teorías del aprendizaje. Materia. <https://www.fichier-doc.fr/2013/06/06/piaget-y-vigotsky/>
- Pierce, R., & Stacey, K. (2010). Mapping pedagogical opportunities provided by mathematics analysis software. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 15(1), 1–20.
- Rico, L. (1997). Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria. <http://funes.uniandes.edu.co/521/2/RicoL97-2528.PDF>
- Sánchez, L. F. (2013). Desarrollo del Pensamiento Variacional en la educación básica primaria: generalización de patrones numéricos. <http://cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/218.pdf>
- Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge University Press.
- Soto, C. F., Senra, A. I. M., & Neira, M. C. O. (2009). Ventajas del uso de las TIC en el proceso de enseñanza-aprendizaje desde la óptica de los docentes universitarios españoles. *Revista electrónica de Tecnología educativa*. <http://www.edutec.es/revista/index.php/edutec-e/article/view/451/185127>
- Téliz, F. (2015). Uso didáctico de las TIC en las buenas prácticas de enseñanza de las matemáticas. Estudio de las opiniones y concepciones de docentes de educación secundaria en el departamento de Artigas. http://www.scielo.edu.uy/scielo.php?pid=S1688_93042015000200002&script=sci_arttext
- Thompson, P. W. (2011). Quantitative reasoning and mathematical modeling. In *Proceedings of the 23rd Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 43–59).
- Thompson, P. W., & Carlson, M. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421–456). National Council of Teachers of Mathematics.

UNESCO, Las tecnologías de la información y la comunicación en la formación docente (2004). <http://unesdoc.unesco.org/images/0012/001295/129533s.pdf>

Urquizo, A. M. (2017). Importancia de las estrategias didácticas cognitivas en el desarrollo del razonamiento matemático en estudiantes de bachillerato de la Unidad Educativa, “Santa Mariana de Jesús”. http://cybertesis.unmsm.edu.pe/bitstream/handle/cybertesis/6277/Urquizo_aa.pdf?sequence=2&isAllowed=y

Vasco, C. E. (2003). El pensamiento variacional y la modelación matemática. Conferencia Interamericana de Educación Matemática. http://pibid.mat.ufrgs.br/2009-2010/arquivos_publicacoes1/indicacoes_01/pensamento_variacional_VASCO.Pdf

Villalonga Pons, J. (2017). La competencia matemática. Caracterización de actividades de aprendizaje y de evaluación en la resolución de problemas en la enseñanza obligatoria. Universidad Autónoma de Barcelona. Recuperado de: <https://www.educacion.gob.es/teseo/imprimirFicheroTesis.do>

Villa-Ochoa, J. A., Castrillón, M., & Castro, E. (2018). Pensamiento variacional y uso de GeoGebra: Un estudio con estudiantes de secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 21(3), 317–340.

Vygotsky citado por Díaz, F. (2003). Cognición situada y estrategias para el aprendizaje significativo. *Revista electrónica de investigación educativa*. <http://www.scielo.org.mx/pdf/redie/v5n2/v5n2a11.pdf>

Wood, D., Bruner, J. S., & Ross, G. (1976). The role of tutoring in problem solving. *Journal of Child Psychology and Psychiatry*, 17(2), 89–100.

Zulnaidi, H., & Zakaria, E. (2012). The effect of using GeoGebra on conceptual and procedural knowledge of high school algebra. *JOURNAL OF MATHEMATICS EDUCATION*, 5(1), 15–30.