

Uso de Geogebra como herramienta didáctica para la comprensión del concepto de Límite

¹**Manuel Antonio Hoyos Garcia**
eucgal07@gmail.com
ORCID: 0009-0009-9408-0470
Doctorando en Educación
Instituto Pedagógico Rural
"Gervasio Rubio" (IPRGR)
Venezuela

²**Eduar Ramiro Burbano Semanate**
eduardburbano1234@hotmail.com
ORCID: 0000-0002-3130-0028
Doctorando en Educación
Instituto Pedagógico Rural
"Gervasio Rubio" (IPRGR)
Venezuela

Recibido: 07/10/2025

Aprobado: 18/11/2025

RESUMEN

Este artículo considera el uso de Geogebra como una herramienta valiosa de enseñanza para la comprensión del límite de funciones en estudiantes de undécimo grado. Adopta una metodología cualitativa basada en la observación directa y el análisis de contenido. Así, se compararon dos grupos: uno con guías planas tradicionales (Grupo 1) y el otro con actividades interactivas en un Geogebra book (Grupo 2), evaluando sus desempeños en la comprensión del concepto mediante rúbricas. Los resultados destacan que Geogebra supera a otros softwares (como Maple, Cabri Geometry o Derive) debido a su accesibilidad, interfaz intuitiva y versatilidad, especialmente integrando recursos como Geogebra book y applets dinámicos. La investigación enfatizó tres perspectivas clave para la enseñanza de límites: geométrica, algebraica/aritmética y analítica, vinculadas a hitos como el método de exhaustión y la noción de infinito. El enfoque diseñado demostró que la mediación tecnológica facilita la manipulación de objetos abstractos, promoviendo una comprensión más profunda en comparación con los métodos tradicionales (Grupo 1), donde las limitaciones materiales dificultaron la comprensión del tópico. Se concluye que la integración de la fenomenología histórica del concepto con herramientas TIC como Geogebra optimiza el aprendizaje, superando obstáculos didácticos y cognitivos, destacando la necesidad de adaptar las prácticas pedagógicas a la complejidad epistemológica de los conceptos matemáticos avanzados.

Palabras clave: Límite, función, modelo ABP, Comprensión, Geogebra.

¹ Institución Educativa Simón Bolívar, Garzón, Huila, Colombia. Docente de Matemáticas; UNIR, España. Magister en Didáctica de las matemáticas; USCO, Colombia, Magister en Estudios Interdisciplinarios de la Complejidad; Estudiante de Doctorado en Educación, UPEL, Rubio, Venezuela

² Institución Educativa El Carmelo, La Plata, Huila, Colombia, Coordinador; Uniamazonia, Colombia, Magister en Educación con énfasis en didáctica de la matemática; Estudiante de Doctorado en Educación, UPEL, Rubio, Venezuela

Uso de Geogebra como herramienta didáctica para la comprensión del concepto de Límite

ENSAYO

ABSTRACT

This article examines the use of Geogebra as a valuable teaching tool for enhancing the understanding of function limits among eleventh-grade students. It adopts a qualitative methodology based on direct observation and content analysis. Two groups were compared: one using traditional flat guides (Group 1) and the other engaging with interactive activities in a Geogebra book (Group 2), with their performance in conceptual understanding assessed through rubrics. The results highlight that Geogebra outperforms other software (such as Maple, Cabri Geometry, or Derive) due to its accessibility, intuitive interface, and versatility, particularly when integrating resources like Geogebra book and dynamic applets. The research emphasized three key perspectives for teaching limits: geometric, algebraic/arithmetic, and analytical, linked to historical milestones such as the method of exhaustion and the notion of infinity. The designed approach demonstrated that technological mediation facilitates the manipulation of abstract objects, fostering deeper understanding compared to traditional methods (Group 1), where material limitations hindered topic comprehension. It is concluded that integrating the historical phenomenology of the concept with ICT tools like Geogebra optimizes learning, overcoming didactic and cognitive obstacles, and underscores the need to adapt pedagogical practices to the epistemological complexity of advanced mathematical concepts.

Keywords: Limit, function, PBL model, understanding, Geogebra

Introducción

En el presente artículo, se aborda la noción de límite de funciones como un constructo matemático complejo y fundamental para el análisis. Se propone una estrategia pedagógica para su enseñanza en el nivel de educación media (grado undécimo), con el objetivo de promover una comprensión profunda y establecer una base sólida para el estudio posterior de conceptos como la derivada y la integral. La propuesta se fundamenta en un análisis teórico exhaustivo que busca optimizar las prácticas docentes a través de la exploración de estrategias de enseñanza, dentro de los que se puede destacar el uso de ABP: Aprendizaje Basado en Problemas, y la integración de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC), específicamente para facilitar la aprehensión del concepto de límite de una función. De esta manera, se pretende superar las dificultades tradicionales asociadas a la enseñanza de este tema, fomentando un entendimiento robusto y perdurable en los estudiantes.

La propuesta se sustenta en una revisión teórica detallada de modelos pedagógicos existentes y en la incorporación de recursos digitales, destacando el software de geometría dinámica Geogebra. Esta herramienta se reconoce por su capacidad para potenciar la visualización de ideas abstractas y permitir la estructuración de actividades interactivas que favorecen un aprendizaje más significativo. Partiendo de la dificultad que muchos estudiantes experimentan en la comprensión del límite de una función, la investigación central se plantea la siguiente interrogante: ¿Cómo lograr que el concepto de límite de funciones sea comprendido por estudiantes de grado undécimo,

Uso de Geogebra como herramienta didáctica para la comprensión del concepto de Límite

ENSAYO

incorporando Geogebra como herramienta didáctica desde la adopción del ABP como estrategia pedagógica?

El objetivo general de esta investigación es diseñar una propuesta didáctica basada en el software Geogebra para facilitar la comprensión del concepto de límite de funciones. Para lograr este objetivo, se plantean los siguientes objetivos específicos:

- * En primer lugar, analizar las herramientas tecnológicas que pueden emplearse didácticamente para abordar el concepto de límite.

- * En segundo lugar, considerar la fenomenología que dio origen al concepto para, una vez comprendida su esencia matemática, diseñar problemas que orienten su estudio.

- * Finalmente, aplicar la estrategia diseñada y analizar los resultados obtenidos en estudiantes de grado undécimo para determinar si la noción del concepto fue efectivamente comprendida.

En coherencia con la orientación y el enfoque pedagógico definidos, se ha desarrollado un marco teórico que proporciona sustento y profundidad al trabajo de investigación. Este análisis incluye una revisión exhaustiva de estudios previos relacionados con las problemáticas inherentes a la enseñanza de las matemáticas, los desafíos asociados a la comprensión del concepto de límite y el impacto del modelo de Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) en la educación matemática. Adicionalmente, se enfatiza el valor de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC), resaltando especialmente el potencial del software Geogebra como una herramienta

fundamental en los procesos de enseñanza y aprendizaje, con un enfoque particular en su aplicación dentro del análisis matemático.

Finalmente, se presentan los resultados derivados de la implementación de la propuesta pedagógica diseñada, cuya principal innovación reside en un recurso interactivo desarrollado con Geogebra. Este material, compuesto por nueve problemas contextualizados y enriquecido con animaciones dinámicas que aprovechan la funcionalidad de los deslizadores de la herramienta, facilita la comprensión del concepto de límite. El enfoque adoptado se basa en la metodología propuesta por Blázquez y Ortega (2002), ofreciendo una experiencia didáctica orientada a la construcción progresiva del conocimiento matemático.

Método

En coherencia con el primero de los objetivos del trabajo, se establece la selección del software de geometría dinámica, a partir de la revisión de diversas investigaciones relacionadas con el concepto de límite y el uso de tecnologías educativas, como el software GeoGebra destacado en el trabajo de Toledo (2017), se resalta también el estudio de Gutiérrez-González (2019) sobre límites y derivadas empleando geometría dinámica, así como las ventajas del ABP señaladas en el trabajo de Alzate et al. (2013) para la enseñanza de matemáticas. En este contexto, el presente estudio utiliza una metodología cualitativa, alineándose con Bernal (2006), al enfocarse en un análisis interpretativo y contextualizado. Conforme a lo anterior, se opta por la *observación*

Uso de Geogebra como herramienta didáctica para la comprensión del concepto de Límite

ENSAYO

directa como técnica de investigación, donde los investigadores fueron *participantes* en el sentido de que permitieron resolver dudas a los estudiantes, guiaron el desarrollo de las sesiones relacionadas con el tópico objeto estudio y valoraron cada aporte y noción que se fue dando dentro de los desarrollos conforme a lo propuesto para cada una de las sesiones en las que se trabajó el concepto.

Los estudiantes elegidos fueron de grado undécimo puesto que en ese nivel es que se establece el límite de funciones para ser orientado, ya que se trata de un concepto complejo dentro del pensamiento matemático avanzado. Así, se tomaron dos cursos, uno de 23 estudiantes (Grupo 1) al cual se le dio una guía plana tipo libro de texto, para el desarrollo de la propuesta y otro de 24 (grupo 2) los cuales trabajaron directamente la aplicación generada desde Geogebra. Los datos recopilados fueron básicamente las respuestas y análisis propios hechos desde cada grupo respecto a los problemas planteados. Tales respuestas y argumentaciones hechas por parte de los respectivos grupos, se analizaron desde el contenido relacionado con la comprensión del concepto de límite en coherencia con los pasos seguidos en los problemas y las concepciones que se buscaba promover en cada uno. Por ello, se consolidaron de manera sintetizada, rúbricas evaluativas que, al final dan una idea resumida de lo que, desde la observación directa y el análisis de contenido podría relacionarse con la comprensión del concepto de límite.

En ese orden de ideas, para la consolidación de los problemas y de la aplicación en general de Geogebra, se destaca una revisión bibliográfica previa sobre las principales

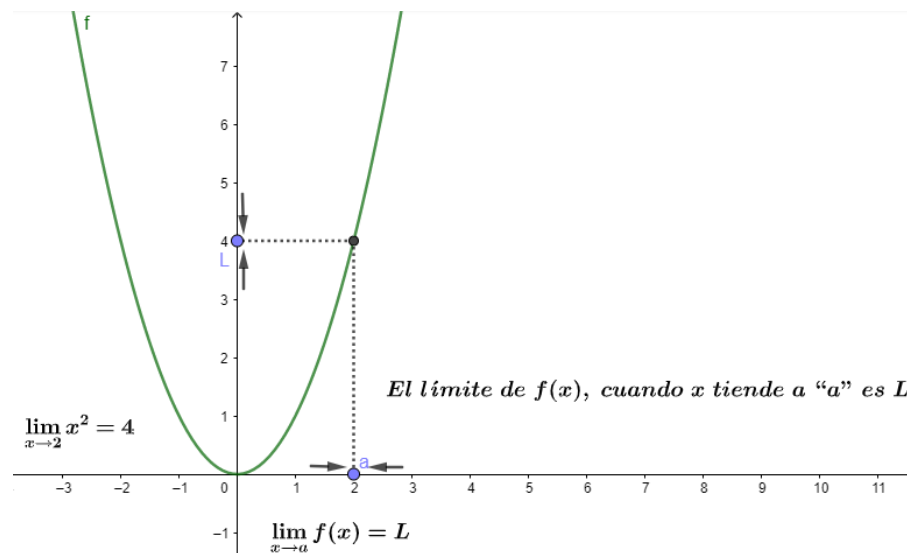
ENSAYO

dificultades en la enseñanza de las matemáticas y del concepto en cuestión. Se referencia así a Brousseau (1989), mencionando que las dificultades en la enseñanza de las matemáticas se originan principalmente en tres tipos de obstáculos: epistemológicos, vinculados a la complejidad intrínseca de los conceptos matemáticos; didácticos, derivados de estrategias pedagógicas inadecuadas; y ontogénicos, relacionados con las características cognitivas y psicológicas de los estudiantes. Además, el carácter abstracto y formal de las matemáticas las hace especialmente desafiantes y propensas a generar confusión.

Por su parte, Socas (1997) complementa esta perspectiva señalando que las dificultades no siempre recaen exclusivamente en los alumnos. Estas pueden estar influenciadas también por las prácticas docentes, las cuales a veces obstaculizan el aprendizaje. Las causas abarcan desde la complejidad inherente a los conceptos, hasta factores como el desarrollo cognitivo de los estudiantes, la calidad de las bases formativas previas, e incluso las emociones o actitudes hacia las matemáticas. Por otro lado, Posso et al. (2007) subrayan que en los niveles de primaria y secundaria predominan prácticas pedagógicas basadas en la memorización mecánica y el aprendizaje repetitivo, lo cual genera desinterés, apatía y falta de comprensión significativa de los conceptos. Por último, Barallobres (2017) resalta la importancia de contextualizar la enseñanza de conceptos matemáticos, como el de límite, teniendo en cuenta tanto los fenómenos asociados como los factores institucionales y contextuales, elementos fundamentales para construir aprendizajes significativos.

Consecuentemente, de acuerdo con Pons (2014), el concepto de límite puede considerarse de alta complejidad, no solo por su definición, sino también por los retos que implica debido a su importancia, ya que resulta fundamental en la estructura del análisis matemático, por ello, se estudian las dificultades encontradas desde la perspectiva de Brousseau (1989). Así, epistemológicamente, de acuerdo con Blázquez y Ortega (2001), el desarrollo de la definición formal del concepto de límite fue el resultado de un largo proceso histórico, lo cual se detalla con precisión en su estudio. Además, se señala que el límite presenta diversas formas de representación, que, aunque equivalentes en significado, varían según el contexto en que se aplican. Estas incluyen expresiones verbales, numéricas, gráficas y simbólicas, cada una con sus particularidades, como se muestra en la figura 1.

Figura 1. Representaciones del concepto de límite de funciones.



Fuente: Elaboración propia

En consideración de los obstáculos didácticos, y, dando cumplimiento al segundo de los objetivos específicos, es necesario resaltar que, según Trujillo et al. (2017), la falta de incorporación de los hitos que han dado lugar a diferentes concepciones del objeto matemático en el diseño de estrategias de aula puede generar problemas que dificultarían procesos de enseñanza y aprendizaje, derivando en obstáculos didácticos. Además, como se observa en los obstáculos epistemológicos ilustrados en la figura 1, el concepto de límite de una función cuenta con múltiples representaciones que, al no considerarse herramientas como gráficas, tablas de datos o algoritmos para facilitar la comprensión de los estudiantes puede convertirse en un impedimento significativo en su aprendizaje.

Ahora, frente a los obstáculos que yacen desde las características cognitivas y psicológicas inherentes a los estudiantes, es decir, desde la perspectiva ontogénica, según Socas (1997), no considerar las etapas del progreso o desarrollo intelectual de los estudiantes al introducir objetos matemáticos constituye un obstáculo significativo. Por ejemplo, abordar el concepto de límite sin asegurar una comprensión adecuada del concepto de función refleja un obstáculo ontogénico, lo que se traduce en errores o en una falta de apropiación del conocimiento. Asimismo, el autor destaca que la dependencia de experiencias intuitivas, a menudo carentes de objetividad, puede dificultar la comprensión del límite, especialmente en estudiantes que no han desarrollado un pensamiento lógico formal o deductivo, indispensable para este nivel de abstracción.

Uso de Geogebra como herramienta didáctica para la comprensión del concepto de Límite

ENSAYO

Además, resulta importante considerar que las actitudes negativas hacia las matemáticas, influidas por factores emocionales o experiencias previas, generan apatía y falta de interés, obstaculizando la comprensión de conceptos como el límite de una función, tópico que, por complejidad conceptual, conlleva de no solo aptitud matemática, también es benéfico contar con elementos de gusto e interés hacia el aprendizaje. Por último, se señala que creencias o temores infundados de origen cultural, social o familiar también contribuyen a dificultades crecientes, afectando tanto la comprensión como la motivación para aprender temas matemáticos en el aula.

El siguiente punto que sintetiza este artículo es el porqué del uso del modelo ABP para estructurar la propuesta, de ese modo, se recalca que, según Morales y Landa (2004), los desafíos que enfrentarán los futuros profesionales superan los límites de las disciplinas tradicionales, exigiendo enfoques novedosos y habilidades para abordar problemas de alta complejidad. Estos retos se caracterizan por su naturaleza integradora, dinámica, interdisciplinaria y creativa, tanto en su análisis como en sus posibles soluciones. En este contexto, el modelo de aprendizaje basado en problemas (ABP) se presenta como una opción adecuada para la enseñanza del concepto de límite, destacándose por su capacidad para abordar problemáticas de este tipo y su afinidad con la enseñanza de las matemáticas.

De manera continua, se indagó sobre modelos que pudieran favorecer la comprensión del concepto, tras haber señalado ya los principales obstáculos. Así, se elige el aprendizaje basado en problemas como el más apropiado, esto con base a las

ENSAYO

bondades se destacan a continuación, en comparación con modelos actuales como por ejemplo el flipped classroom y el aprendizaje basado en proyectos. Consecuentemente, siguiendo la perspectiva de Freudenthal (1983) y los planteamientos de Bressan et al. (2004), es crucial enfatizar que el proceso de matematización, entendido como la construcción activa de conocimientos matemáticos, debe priorizarse por encima de la simple transmisión de resultados finales descontextualizados. En este marco, se subraya la relevancia de la algoritmización y la algebrización como procesos que promueven habilidades cognitivas y competencias, en contraste con la mera memorización de algoritmos o formulaciones algebraicas.

En el anterior sentido, se destaca la importancia de implementar el ABP como estrategia didáctica para enseñar el concepto de límite en matemáticas, se considera su compatibilidad con el uso de herramientas tecnológicas y la posibilidad adicional de vincular temáticas complejas que suponen un reto para ser aprendidas. Se destaca entonces desde el trabajo investigativo, este enfoque que busca conectar el aprendizaje de los estudiantes con las situaciones problemáticas históricas que dieron origen al concepto; así se promueve favorecer una comprensión más significativa del tópico objeto de estudio. Sobre este último aspecto, cabe referenciar algunos autores que justifican la elección; algunos referentes tomados fueron:

Bejarano et al. (2015) argumentan que adoptar el ABP requiere integrar fundamentos teóricos, renovar las prácticas pedagógicas y validar propuestas educativas que sitúen al estudiante como eje central del proceso formativo. Este

Uso de Geogebra como herramienta didáctica para la comprensión del concepto de Límite

ENSAYO

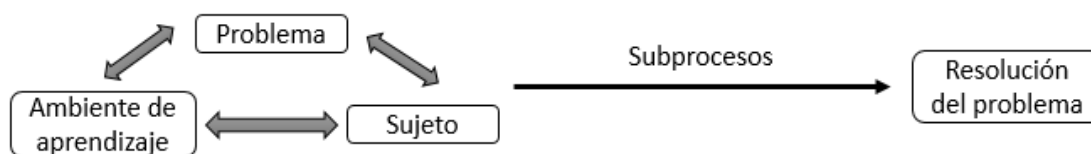
modelo se basa en proporcionarles oportunidades para participar activamente y construir conocimiento a partir de problemas reales, siendo la comprensión histórica del límite una pieza clave para dotar de sentido a este concepto. Por su parte, Alzate et al. (2013) destacan que el ABP incentiva el interés estudiantil por las matemáticas, permitiéndoles aplicar los conceptos aprendidos a situaciones reales. Además, recomiendan incluir herramientas digitales, ya que estas contribuyen a consolidar el aprendizaje mediante la interacción con tecnologías, lo que refuerza la apropiación y comprensión del límite desde una perspectiva innovadora.

En cuanto a Morales y Landa (2004), estas autoras subrayan que el ABP promueve habilidades críticas, fomenta la reflexión estratégica para resolver problemas y prioriza la retención y aplicación práctica del conocimiento adquirido. Finalmente, Cruz (2006) resalta que esta metodología demanda una revisión rigurosa del contenido y del contexto en que se imparte, siendo el análisis epistemológico del concepto de límite esencial para abordar las dificultades asociadas y comprender su evolución a lo largo del tiempo.

Posteriormente, al contar ya con una elección del modelo pedagógico a usar, se sugiere el uso de una herramienta didáctica que potencie el propósito del trabajo y que facilite el manejo de las variables generales del proceso de resolución de problemas enmarcadas en la figura 2 y que corresponden a la complejidad de usar la resolución de problemas como estrategia de enseñanza, mostrando que, no solo el problema debe ser planteado adecuadamente, también se debe considerar el ambiente de

aprendizaje y la activación del sujeto dentro de los propósitos formativos que se producen en sus producciones dentro de la búsqueda de soluciones a las situaciones.

Figura 2. Aspectos genéricos en el proceso de resolución de problemas.



Fuente: Basado en D'Amore y Zan, 1996

Para ello, siendo concordantes con el trabajo de Toledo (2017), se enfatiza en la amplia gama de software matemáticos disponibles para fines educativos, destacando especialmente las capacidades del programa Geogebra, desarrollado por Markus Hohenwarter y un equipo especializado a nivel internacional. Este software combina herramientas avanzadas con accesibilidad gratuita, una característica que lo distingue de otras aplicaciones como Derive, Maple y Cabri Geometry. Justo es este último, un elemento de gran valor para optar por él. En adición, se destaca su interfaz intuitiva y accesible; según Mora (2012), Geogebra destaca por su instalación sencilla y su interfaz atractiva, que permite a usuarios de diferentes niveles educativos adaptarse rápidamente. Además, en una misma ventana, combina representaciones gráficas y algebraicas, lo cual facilita la comprensión visual. En contraste, Maple y Derive presentan interfaces menos amigables para usuarios con poca experiencia tecnológica, y Cabri Geometry carece de visualizaciones integradas como las de Geogebra.

Por otro lado, desde su animación y dinamismo en la enseñanza, Geogebra permite

Uso de Geogebra como herramienta didáctica para la comprensión del concepto de Límite

ENSAYO

la creación de animaciones dinámicas mediante herramientas como el deslizador, lo que resulta especialmente útil para explorar conceptos como el límite de una función (Toledo, 2017). Aunque Maple también ofrece opciones de animación, estas requieren una mayor formalidad en su configuración, lo que limita su uso didáctico en comparación con la flexibilidad de Geogebra. Se tiene, además, su acceso gratuito y versatilidad, puesto que, la gratuidad de Geogebra es una ventaja significativa, ya que facilita su uso tanto en instituciones educativas como en hogares. Además, su funcionalidad no depende de la instalación, ya que las herramientas están disponibles en su sitio web. El software permite guardar archivos en formatos como “.ggb” y “.html”, lo que posibilita su edición y uso en navegadores y dispositivos móviles, como señala Mora (2012).

Por último, la compatibilidad con estrategias pedagógicas avanzadas, hace que Geogebra también sobresalga por la posibilidad de crear materiales interactivos como **applets** o GeogebraBooks, ideales para estructurar actividades basadas en ABP. Estas herramientas facilitan la exploración de conceptos matemáticos a través de animaciones manipulables en diversos dispositivos, desde ordenadores hasta tablets o smartphones, así, Geogebra se posiciona como una herramienta integral que combina accesibilidad, dinamismo y compatibilidad tecnológica, lo que lo convierte en una opción preferida para la enseñanza de concepciones matemáticas avanzadas como es el caso del límite de funciones.

Continuando en la realización de la propuesta, al tener la guía con el modelo y la

ENSAYO

herramienta a usar, entonces se estructura un geogebra book con 9 problemas secuenciales que, de acuerdo con Rendón (2017), abordan diversos hitos y aplicaciones interdisciplinarias, destacando particularmente aquellas provenientes de la Física. Entre estas, se incluyen el análisis de la variación en velocidad y aceleración, así como el estudio de áreas o perímetros a partir de una perspectiva geométrica. Además, se explora la noción de acercamiento e infinito, desde la paradoja de Zenón y se analiza la determinación de números irracionales como límites de sucesiones convergentes. Todo esto culmina en la introducción y comprensión de la simbología del límite, permitiendo una asimilación progresiva de la definición moderna basada en la notación ϵ -delta. El geogebra book se evidencia en <https://www.geogebra.org/m/dx4qcc7n> y cada problema obedece a la síntesis de pasos que se muestran en la tabla 1.

Tabla 1. Componentes del ABP

O.	Descripción	Acciones
	Planteamiento y estudio del problema	Se formula por parte del docente, el problema a abordar para estudiar sus elementos y características.
	Propuesta de alternativas y acotamiento	Se brinda la posibilidad a los estudiantes para que ideen cómo encarar el problema y establezcan delimitaciones en el mismo.
	Datos disponibles y aspectos por investigar	Los estudiantes deben identificar elementos que proporciona el problema y considerar qué elementos se deben indagar
	Elaboración de abordajes viables	De acuerdo a los elementos anteriores, se componen posibles maneras de abordar el problema.

Uso de Geogebra como herramienta didáctica para la comprensión del concepto de Límite

ENSAYO

Presentación de solución
y conclusiones

Se sintetiza una posible solución y se
comparte con compañeros

Fuente: Síntesis con base a Leiva (2016) e Hidalgo et al. (2015)

Conforme se estructura la propuesta, entonces se procede a tomar dos grupos de estudio del grado undécimo, un primer grupo conformado por 23 estudiantes, trabaja los problemas relacionados en el Geogebra book pero sin el dinamismo del programa, solo los trabaja como guía didáctica plana y tradicional y un segundo grupo de 24 los aborda haciendo uso del software y sus bondades. Del anterior modo, desde un enfoque cualitativo, se puede contrastar lo obtenido por uno y otro grupo en términos de comprensión del objeto matemático en cuestión. De este modo, se da cumplimiento al último de los objetivos específicos que se enmarcan en la introducción del presente artículo y en el siguiente apartado, se resaltan los hallazgos.

Resultados

Como se menciona en el apartado anterior, se propone una aplicación de 9 problemas coherentemente ordenados los cuales obedecen a la evolución conceptual del tópico y los principales hitos que fueron sentando las bases para su estructuración final. De este modo, en la tabla 2, se enuncian los 9 problemas subdivididos en grupos de tres, para favorecer la comprensión desde las perspectivas Geométricas, Algebraica-Aritmética y Analítica, lo anterior se establece según la evolución histórica, elementos didácticos, ontogénicos y fenomenológicos del tópico.

Tabla 2. Relación de problemas y perspectiva del concepto de límite

Problemas estructurados para la comprensión del concepto de límite de una función		
Problema	Situación	Perspectiva
1	Sistemas de riego	Noción de Límite desde una perspectiva Geométrica
2	Área y perímetro (Círculo)	
3	¿Segmentos infinitamente pequeños?	
4	Aquiles y la tortuga	Límite desde la perspectiva Algebraica-Aritmética
5	El número de Euler	
6	Velocidad instantánea	
7	Comportamiento de empresas	Límite desde la comprensión de su definición
8	Formalidad del límite	
9	Entrenar más, mejora mi rendimiento	

Fuente: Elaboración propia

La aplicación del GeogebraBook, el cual se integra en el link <https://www.geogebra.org/m/dx4qcc7n> se realiza planificando las clases respectivas con sus momentos que integran los pasos del ABP expuestos en el apartado anterior. También se vincula para cada problema, en los tiempos planificados, la respectiva rúbrica evaluativa que permitió valorar los desempeños de los estudiantes. En la figura 3 se aprecia una planeación didáctica de una sesión de clase dispuesta a abordar el primero de los problemas y en la tabla 3 se plasman los desempeños esperados en sus distintos niveles, mediante una rúbrica evaluativa que servirá como elemento de validación para la comprensión última del concepto y de las nociones generadas tras el

avance en cada problema.

Figura 3. Planificación de clase: aproximación al límite usando un problema sobre sistemas de riego.

Sesión: 1 Asignatura: Matemáticas I Objetivos: Determinar o extraer conclusiones en situaciones reales a partir de la noción de límite y el estudio del límite de una función en un punto. * Utilizar con solvencia y responsabilidad las TIC promoviendo hábitos de estudio que generen aprovechamiento eficaz del aprendizaje. Indicadores: * Establece cuestiones y conjeturas relacionadas con el límite de áreas usando Geogebra. * Resuelve problemas relacionados con el límite, de forma individual y cooperativa. * Hace uso adecuado y responsable de las herramientas tecnológicas para reflexionar sobre su propio aprendizaje.		Bloque de contenidos: Bloque 3-Análisis Curso: 1º Bachillerato Contenidos: Concepto de límite de una función en un punto y en el infinito. Criterio general de evaluación: Comprender y utilizar los conceptos de límite y continuidad de una función aplicándolos en el cálculo de límites y el estudio de la continuidad de una función en un punto o un intervalo.	Duración: 2 clases de 50 minutos
MOMENTO DE LA CLASE – (Agrupamiento) (P^a) INICIO (Individual ³), se hace una presentación de la metodología a trabajar y muestra general del Geogebra (https://www.geogebra.org/m/ds4qcc7n), permitiendo ver a los estudiantes que se harán 9 problemas desde el navegador web, el uso de Geogebra y los razonamientos en papel y lápiz (20 min). Luego, se hará una exploración de Geogebra y sus herramientas a usar, se espera los estudiantes ya tengan saberes previos sobre el uso del software, de no ser así, igual se instruirá sobre todo lo básico, que entre otras cosas incluye la graficación de funciones, la vinculación de puntos sobre objetos, el uso de deslizadores, la construcción de polígonos, entre otras cosas (20 min).		COMPETENCIAS CCL CMCT CD	 En primera instancia, se muestra el contexto de la situación a analizar, que para éste primer problema se relaciona con los sistemas de aspersión para el riego de cultivos. Luego, se revisa el video para una mejor ilustración y se plantea el problema a resolver. Entrando al link se visualiza todo lo relacionado a cómo abordar el problema desde la aplicación de los pasos inherentes al modelo ABP.
1	Presentación del problema 1 (10 min-In), el link del problema es:	CD	CSC
2	Ideas sobre solución al problema (10 min): En este paso, conforme a saberes previos y creatividad individual, se tratará de exponer al docente cómo abordar el problema.	CPAA	
3	Investigación (10 min-In): Dentro de los propósitos del problema, se espera que los estudiantes indaguen sobre el método de exhaustión y cómo a través de polígonos inscritos o circunscritos, se puede ir acercando al área de un círculo. Para esto, podrán usar la red e incluso buscar actividades en Geogebra relacionadas con esos temas. Posterior a la indagación, se espera que listen los elementos que tienen y los que no, y se requieren para resolver el problema. El docente estará presto a orientar.	CMCT CEC	
4	Trabajo en el Applet (20 min-In): Tras la	CMCT CPAA y CD	
4	Trabajo en el Applet (20 min-In): Tras la presentación de ideas, la investigación y orientación respectiva, en el Applet se dinamizan dos posibles modelos que podrían pensarse como soluciones al problema.	CMCT CPAA y CD	
5	Debate de conclusiones (10 min-Pa): Dentro del propósito formativo de la evaluación, se valorará que se debata con compañero las conclusiones relacionadas con el problema.	CCL, CMCT CPAA, CD y CSC	
RECURSOS: Aula de informática, Ordenadores, Geogebra , proyector, Youtube , Internet, cuaderno y esfero, Docente y estudiantes			

Fuente: Elaboración propia

Tabla 3. Rúbrica evaluativa: aproximación al límite usando un problema sobre sistemas de riego

Indicadores y criterios de evaluación	Nivel 1 Superior	Nivel 2 Alto	Nivel 3 Básico	Nivel 4 Bajo	Puntuación
	4.5 - 5	3.9 - 4.4	3 - 3.8	1 - 2.9	
Plantea interrogantes e hipótesis sobre el límite de áreas mediante el uso de Geogebra ³ .	Muestra habilidad para plantear interrogantes e hipótesis sobre el límite de áreas mediante el uso de	Plantea interrogantes e hipótesis sobre el límite de áreas mediante el uso de Geogebra	Con algunas dificultades, plantea interrogantes e hipótesis sobre el límite de áreas mediante el uso de	Presenta dificultades notables para plantear interrogantes e hipótesis sobre el límite de áreas	

³ Se aclara que, para el grupo que no usó el software, este criterio se omite.

ENSAYO

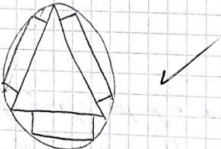
Geogebra	Geogebra	mediante el uso de Geogebra
Soluciona problemas sobre límite de funciones de forma individual y cooperativa.	Es hábil para solucionar problemas sobre límite de funciones de forma individual y cooperativa	Soluciona problemas sobre límite de funciones de forma individual y cooperativa
Con algunas dificultades, soluciona problemas sobre límite de funciones de forma individual y cooperativa	No logra solucionar problemas sobre límite de funciones de forma individual ni cooperativa	
Emplea responsablemente recursos tecnológicos para evaluar su propio aprendizaje.	De manera ejemplar, emplea responsablemente recursos tecnológicos para evaluar su propio aprendizaje	Emplea responsablemente recursos tecnológicos para evaluar su propio aprendizaje
Algunas veces emplea responsablemente recursos tecnológicos para evaluar su propio aprendizaje	No emplea responsablemente recursos tecnológicos para evaluar su propio aprendizaje	
Total		

Fuente: Elaboración propia

Conforme a lo anterior, la aplicación se torna un producto que busca una mejora significativa en la comprensión del concepto de límite de funciones. A modo de ejemplo, en las próximas figuras, se muestran elementos de los estudiantes al abordar cada pregunta en los dos grupos que fueron partícipes del trabajo. Así, en la figura 4, se evidencian las aproximaciones a la solución del problema 1, en la izquierda se muestra lo realizado por el grupo 1, el cual no usó los links ni applets dinámicos de Geogebra sino guías impresas sin posibilidad de interacción, mientras a la derecha se ve lo realizado por el grupo 2, quienes sí interactuaron con las applets del problema. Se inicia entonces con el problema 1, el cual se ilustra en el link:

<https://www.geogebra.org/m/dx4qcc7n#material/fznm9u4e>

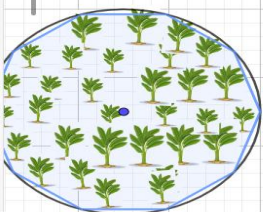
Figura 4. Respuestas al problema: Sistemas de riego.

Grupo 1	Grupo 2
Respuesta. 1. Determinar el área de disposición del sistema de riego. lo más por el anterior. 2. El resultado anterior se multiplica por 8, que es la cantidad de plantas. para calcular el área se debe rellenar como en la siguiente figura.  Se debe rellenar el área de disposición para aproximarse al área real.	Área Total: 248 m² aprox x 1.5 Área Total: 372 m² aprox Área: 191 m² 18 m² 72 m² 4 m² aprox Por cada 1 m² se pueden sembrar 5 plantas 372 m² x 5 = 1860 plantas que se pueden sembrar

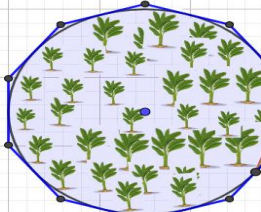
Dinamización del problema con el Applet, por parte del grupo 2

Algunas posibilidades pueden ser...

☒ Usar polígonos inscritos



☒ Usar polígonos circunscritos



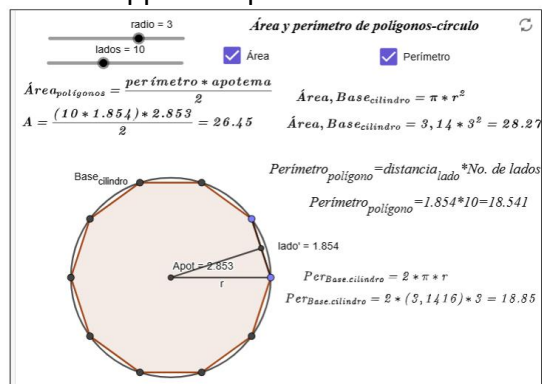
Fuente: Elaboración propia

En la figura 4, se deja una muestra de la interpretación inicial del concepto desde la cotidianidad de los estudiantes, para ello, se presenta una situación relacionada con los sistemas de riego. Se vislumbra una mejor aproximación en el grupo 2, con lo que se manifiesta la importancia del software y en general, de la dinamización del concepto de límite en esta etapa inicial. Continuando, en la figura 5 se muestra la comparación entre las conclusiones del grupo 1 y 2 para la solución al problema 2 (<https://www.geogebra.org/m/dx4qcc7n#material/sts5wdfr>).

Figura 5. Respuestas al problema 2: Área y perímetro (Círculo).

Grupo 1	Grupo 2
Posible Solución El Volumen se encuentra multiplicando el perímetro de la base por la altura como el diámetro es 1.5m, el perímetro se calcula con $P = 1.5 \times \pi$, luego simplemente multiplico eso por 5m y obtengo el volumen del cilindro. Conclusiones 1) Si, porque el triángulo ya está dentro del círculo y como esta medida representa su área de manera suficiente, ya importa cuántos lados tenga, porque el círculo sigue rodeándolo. 2) Si, porque al hacer el círculo más grande, el triángulo también aumenta su tamaño y cubre más área, así que la aproximación se vuelve perfecta con solo aumentar el radio. 3) Si, porque para hacer que no se base en la fórmula de área de triángulo, se puede usar la fórmula de área de círculo, así como el perímetro de círculo. 4) Si, porque al hacer el círculo más grande, el triángulo también aumenta su tamaño y cubre más área, así que la aproximación se vuelve perfecta con solo aumentar el radio.	Posible Solución Para encontrar el volumen del cilindro sin usar π, primero aproximamos la base con un polígono regular de muchos lados. Como el diámetro es 1.5m, eso significa que cada vértice del polígono está dentro de un círculo de radio 0.75m. Luego, calculo el perímetro sumando la longitud de sus lados y bajo la fórmula del área del polígono: $A_{pol} = \frac{\text{Perímetro} \times \text{Apotema}}{2}$. Finalmente, multiplico el área de la base por la altura de 5m para obtener el volumen. Conclusiones 1) No, porque un triángulo inscrito en la circunferencia deja mucho espacio sin cubrir dentro del círculo. La diferencia entre el área del triángulo y el área real del círculo es muy grande. Para que la aproximación sea más precisa, se necesita un polígono con más lados, ya que se va acercando mejor a la forma curva del círculo. 2) No necesariamente, porque aunque el triángulo crece con el radio, la proporción del área que falta dentro del círculo sigue siendo muy grande. Sin embargo, si se usan polígonos con más lados, la aproximación sí mejora con un radio mayor. 3) Para que la aproximación sea efectiva, el polígono debe tener un número alto de lados, como 50 o más, aunque matemáticamente, cuanto más lados tenga, mejor será la aproximación. Un dodecágono (12 lados) ya se acerca bastante, pero aún deja pequeños espacios entre sus lados y la circunferencia. 4) A medida que el polígono tiene más lados, su área y perímetro se acercan cada vez más a los del círculo. Esto sucede porque los lados se hacen más pequeños y la forma del polígono se parece más a la circunferencia. En el límite, con infinitos lados, el polígono se convierte en un círculo.

Uso de Applet Grupo 2



Fuente: Elaboración propia

Como se muestra en el grupo 2, las respuestas a las preguntas orientadoras fueron mucho más estructuradas y se acercan más al entendimiento de la idea inicial de límite, por su parte en el grupo 1, aunque no se dio la interacción con el Geogebra, se realizó el acompañamiento respectivo y se logran respuestas

válidas, aunque menos completas que las del grupo homólogo. Es de recalcar que, este y el anterior problema acercan a los estudiantes a la idea intuitiva de límite desde el uso de la geometría y más precisamente desde la noción de lados infinitos en lo que, históricamente se conoció como método de exhaustión.

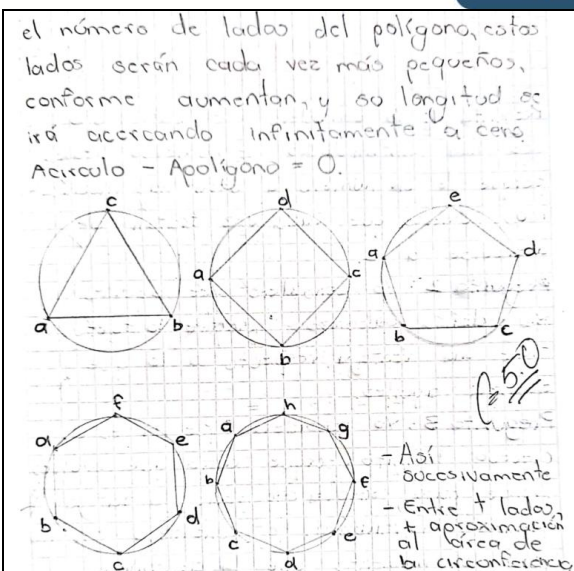
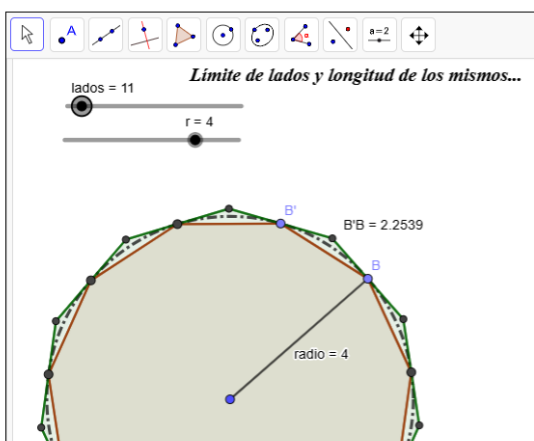
En la figura 6 se muestra la comparación entre las conclusiones del grupo 1 y 2 para la solución al problema 3 (<https://www.geogebra.org/m/dx4qcc7n#material/c9xwazv4>), el cual se relaciona con los dos anteriores, puesto que, trata de la síntesis del método de exhaustión dentro de una situación específica de las matemáticas, a saber, el cálculo del área en polígonos que conlleven al área de un círculo cuya medida es necesaria para considerar por ejemplo, el volumen de cilindros o la disposición de las plantas en el problema 1.

Figura 6. Respuestas al problema 3: ¿Segmentos infinitamente pequeños?

Grupo 1	Grupo 2
Problema 3: Con respecto al problema 1, calcular y con base a la información que nos suministran podemos decir que el número de lados más óptimo es de 100 lados en este caso, ya que sabemos que el número de lados de una circunferencia es infinito, por tanto cada vez que se aumenten los lados disminuirá la longitud de estos, ahora la longitud de estos lados más óptimo sería de 0,1256 respecto al problema y así estos dos valores serían la mayor aproximación en cuanto al área de la circunferencia con base al este polígono. 1. su longitud óptima debería ser $B'B = 0.0628$ con un radio $r=1$ $L=100$ lados 2. entre más lados tenga el polígono más se aproxima al límite cero e infinito.	Cuando se intenta calcular el área de un círculo en base al área de polígonos regulares se dice que los círculos tienen lados infinitos independientemente del área que posean. Esto se debe a que, entre más lados tenga el polígono inscrito, el área de este tiende a acercarse más al área del círculo, sin embargo, siempre va a haber un margen de error, nunca llega a cubrir completamente el área de la circunferencia, a medida que aumentan los lados del polígono, el acercamiento se vuelve insignificante, no es gran cosa, aunque cada vez el error va a ser más pequeño. Al ir aumentando

Exploración en el Applet, Grupo 2

ENSAYO



Fuente: Elaboración propia

Para este tercer problema, en el que se debe consolidar una primer idea de infinito (desde el número de lados para el polígono que optimice el proceso) y de tendencia a cero, para el valor de las longitudes de los infinitos lados que se deben generar, el grupo 1 hace un análisis apropiado pero con vacíos conceptuales como consecuencia de no poder manipular los deslizadores del applet que sí tienen a su disposición los estudiantes del segundo grupo, de ahí que, se muestren incluso ilustraciones tomadas del applet.

En la figura 7, se presentan algunas de las respuestas relacionadas con el problema 4, el cuál plantea a los estudiantes de ambos grupos la paradoja de Aquiles y la Tortuga con unas preguntas orientadoras sobre una idea más clara del infinito y de procesos infinitos que pueden, por medio de sumatoria de series, volverse finitos (<https://www.geogebra.org/m/dx4qcc7n#material/rt4e3vm4>).

Figura 7. Respuestas al problema: Aquiles y la tortuga.

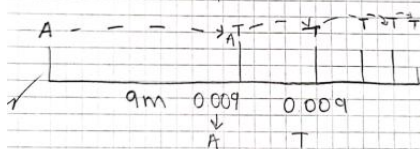
Grupo 1

Grupo 2

Problema 4. Aquiles y la tortuga
matemáticamente aquiles alcanza
a la tortuga
entre 1 y 2 los números reales
son infinitos
2013
2014

10 m x segundo
1 m x segundo
C=44
P2 si es posible que aquiles la
alcance ya que el tiempo
decorrer 10 m x segundo, o sea
que corra más que le de la
mitad de distancia
/ heterotéricamente hablando

P3 Si es un proceso infinito
ya que mientras aquiles avanza
el punto donde estaba la tortuga
va mas adelante que el, esto he
matemáticamente hablando



No porque siempre aquiles irá mas
atras que la tortuga hasta
el punto que esta, lo cual la
distancia no dará 0. Por lo tanto
aquiles y la tortuga
matemáticamente hablando

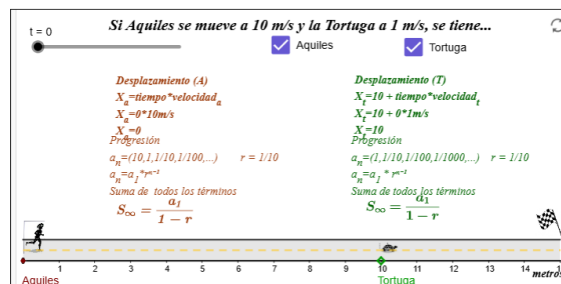
P4 infinitos números
 $T \times V = D$
11.12
0.01 m

aproximación
Problema No.4 Aquiles y la Tortuga
P1. Respuesta Entre el 1 y el 2 hay una serie de números infinitos.
puesto que dentro de los números reales no hay números límites.
Siempre habrá un número cuyo valor sea mayor que su antecesor como
por ejemplo 1,00001 es menor que 1,00002 y así infinitamente.
P2. Respuesta Si la tortuga se desliza a una velocidad de 1 m/s y
Aquiles a una velocidad de 10 m/s, aunque descanseamos la
longitud del trayecto puede deducir que Aquiles alcanzará y volverá
a la tortuga. Se requiere que a la tortuga le den un vector
10 veces mayor al valor inicial para que ambos corredores lleguen
a la meta al mismo tiempo.
P3. Respuesta La paradoja es infinita aunque la distancia que separa
a la tortuga de Aquiles sea más corta siempre habrá un espacio de
menor tamaño entre los 2 puesto que si la tortuga avanza y sigue
se mueve hasta el anterior punto de reposo de la tortuga la distancia será
un momento en donde Aquiles alcance a la tortuga la distancia será
siempre diferente de 0, la constante de la paradoja hace infinito el proceso.
P4. Respuesta Hay infinitos números

Trabajo del applet

4. Applet con velocidades para Aquiles y la Tortuga

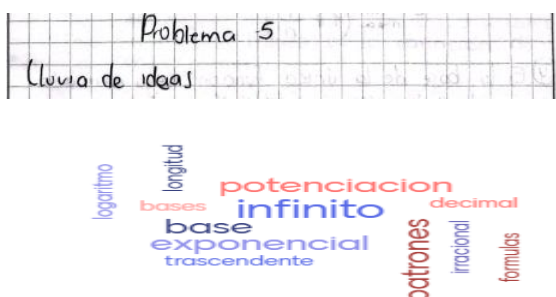
A continuación, anima la carrera en el Applet usando el deslizador de tiempo y, en parejas, resuelvan el problema de
sucesiones convergentes (usa las casillas de control para Aquiles y la tortuga), si Aquiles realmente nunca alcanza
menciona en el video.



Fuente: Elaboración propia

Frente a este cuarto problema, se evidencia una curiosidad y es que, en ambos grupos hubo una muy buena idea intuitiva de procesos infinitos, como el caso de Aquiles tratando de alcanzar a la tortuga, sin embargo, para el grupo 2, resultó más fácil sintetizar ideas sobre las preguntas orientadoras, la razón es que el applet dinamiza con gran amplitud la situación. En la figura 8 se muestra la comparación entre las respuestas del grupo 1 y 2 para la solución al problema 5, el cual se relaciona con el número de Euler y un primer acercamiento formal al concepto de límite desde el número en cuestión. Se aclara que, el grupo 2, tuvo dentro del link: <https://www.geogebra.org/m/x2jh8dxu> dos videos ilustrativos y el uso de la aplicación mentimeter para exponer sus ideas en relación al número. Mientras que el grupo 1, recibió la información de forma tradicional, es decir mediante clase magistral.

Figura 8. Respuestas al problema 5: El número de Euler.

Grupo 1	Grupo 2
	 Problema 5 Claro de ideas logaritmo, longitud, bases, potenciacion, infinito, decimal, base, exponencial, trascendente, patrones, irracional, formulas

Uso de Geogebra como herramienta didáctica para la comprensión del concepto de Límite

ENSAYO

Problema 5

- fluvia de ideas
 - El número e es solo un número raro que alguien inventó para complicar las matemáticas. No tiene mucho sentido buscar su origen. Pero encontrar el valor de e de la forma más rápida y sencilla simplemente toma como 2.71 o 2.72 porque así aparece en las calculadoras.
- lista de lo que se tiene y de lo que no
 - lo que se tiene
 - Se sabe que e aparece en los modelos matemáticos de crecimiento y decaimiento.
 - Se relaciona con los algoritmos naturales y ecuaciones diferenciales.
 - lo que hace falta
 - como se define exactamente e
 - por qué es importante
 - una fórmula para calcular e que no dependa de series o integrales
- posible solución

El número e se puede calcular con un serie y creo que la fórmula es así:

$$e = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

estas expresiones deben daros e porque son parecidas a otras series que he visto en clase como aparecen en exponenciales, cualquier cosa que tenga potencias y sumas factoriales deberían daros e .

Lista de lo que se tiene y de lo que no

Para analizar el número e , primero reviso que información tengo y que necesito buscar.

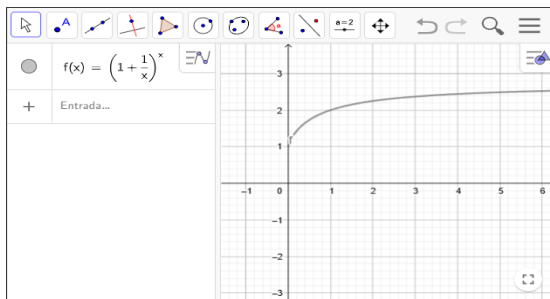
- ① Sabe que e , aparece en modelos matemáticos de crecimiento y decaimiento.
- ② Se relaciona con los logaritmos naturales y las ecuaciones diferenciales.
- ③ Existe una forma de encontrarlo usando límites como:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Posible solución

Para entender el origen del número e , podemos pensar en cómo aparece naturalmente en situaciones de crecimiento continuo. Aunque no podemos usar intereses compuestos ni la serie de factoriales, si podemos analizarlo con límites. Una forma de definir

4. Plasma las posibles soluciones encontradas en equipo haciendo uso de Geogebra.



Este límite describe cómo algo crece cuando se actualiza constantemente en intervalos cada vez más pequeños. Es decir, si tomamos algo una cantidad y la aumentáramos repetidamente en proporciones muy pequeñas, el valor final tiende a e .

Fuente: Elaboración propia

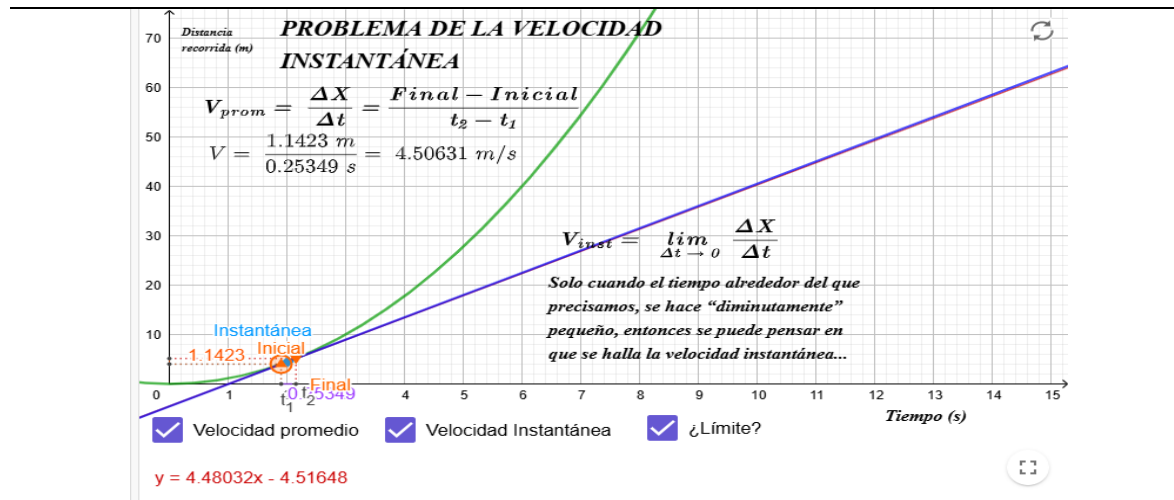
De acuerdo a las respuestas mostradas, es notorio que, ambos grupos comprendieron en general la idea del número “ e ” como un valor peculiar y que, es necesario el cálculo matemático para llegar a él, no obstante, el grupo 2, mostró un

ENSAYO

mejor entendimiento del cómo llegar a dicho valor usando las funciones y el límite en una función particular. En la figura 9, se presenta un ejemplo de respuestas para el grupo 1 y 2, en el problema relacionado con velocidad instantánea (<https://www.geogebra.org/m/dx4qcc7n#material/sqfnzumv>). Para este sexto problema, se aborda el concepto de límite desde la física, de modo que, los estudiantes podrán interactuar con la noción de derivada desde la concepción de razón de cambio.

Figura 9. Respuestas al problema 6: Velocidad instantánea.

Grupo 1	Grupo 2
Problema 6 • Lista de ideas - se calcula la velocidad promedio en los primeros 6 segundos $v_{prom} = \frac{x_6 - x_0}{6 - 0}$ Suponiendo que $t = 6s$ la distancia es de 40m $v_{prom} = \frac{40 - 0}{6} = 6.67 \text{ m/s}$ • Lista de lo que se tiene y de lo que no - listado de lo que nos da el problema - concepto de velocidad promedio ($v_{prom} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$) - concepto de velocidad instantánea - una gráfica distancia vs tiempo - el auto ($v_0 = 0$) - tiempo total de observación 6 segundos - listado de lo que falta - la aceleración exacta - la masa del automóvil - la ecuación de la velocidad en función del tiempo • posible solución Para encontrar la velocidad en $t = 2.5s$, usamos la fórmula de velocidad promedio $v = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i}$ Pero como no quisiera calcular la velocidad promedio mejor usamos $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ Sustituyo los valores de la gráfica en $t = 2.5s$ donde la posición es aproximadamente 10m $v = \frac{2(10) - 0}{2.5} = 8 \text{ m/s}$ Así que la velocidad en $t = 2.5s$ es 8 m/s.	Problema 6 Lista de ideas Para encontrar la velocidad en $t = 2s$, se traza una recta tangente a la curva en ese punto y se calcula su pendiente. Observando la gráfica, la pendiente de la tangente en $t = 2s$ parece indicar que el objeto tiene una velocidad cercana a 10 m/s (estimación basada en la variación de distancia con el tiempo). Elementos que nos da el problema 1) Concepto de velocidad promedio ($v_{prom} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$). 2) Concepto de velocidad instantánea (derivada o pendiente de la tangente). 3) Una gráfica de distancia vs tiempo con datos visuales. 4) El auto parte del reposo ($v_0 = 0$) 5) Tiempo total de observación: 6 segundos Elementos que hacen falta 1) Ecuación de la posición $x(t)$ para usar cálculo diferencial 2) Datos numéricos exactos de distancia en cada segundo para mayor precisión. 3) Escala exacta de la gráfica para obtener mayor estimación. 4) Procedimiento para trazar la recta tangente en $t = 2s$. Posible solución



Fuente: Elaboración propia

Como se puede apreciar en los productos presentados por ambos grupos, se orienta a los estudiantes, con el caso de la velocidad instantánea, a pensar en valores de tiempo muy pequeños, además, en el grupo 2, se detecta la intuición de hallar la pendiente a una recta tangente a la curva de velocidad vs tiempo, para considerar la velocidad justo en ese punto. Luego, en la parte inferior, se hace un acercamiento mediante el applet. Pasando a la última sección de problemas, en la figura 11, se presentan los avances para el problema 7, el cual se visualiza en <https://www.geogebra.org/m/dx4gcc7n#material/xng5aurb> y esquematiza una primera situación en la que, el estudiante se familiariza con los elementos épsilon y delta de la definición formal de límite de una función.

Figura 10. Respuestas al problema 7: Comportamiento de empresas.

Grupo 1

Grupo 2

ENSAYO

Problema 7

• lluvia de ideas.

- Para conocer el estado financiero antes de los 2 años, evaluo $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3$ para $x=2$, que la empresa tenía 3 millones en pérdidas, luego para los 4 años multiplico la pendiente de la función lineal $g(x)$ por 4 y obtengo $g(4) = 18$, lo que indica que la empresa tenía 18 millones de euros finalmente el límite de ganancias es infinito porque la función $h(x)$ sigue creciendo, lo que significa que el inversionista puede ganar ilimitadamente si sigue invirtiendo.

- lista de lo que se tiene y de lo que no
- elementos que se encuentran en el problema
- Funciones definidas por intervalos

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3 \text{ para } 0 \leq x \leq 2$$

$$g(x) = \frac{19}{3}x - \frac{19}{3} \text{ para } 2 \leq x < 4$$

$$h(x) = (1 + \frac{1}{x})^x + \frac{7}{3} \text{ para } x \geq 4$$

- la condición inicial de la empresa que empieza con un déficit de 3 millones de euros
- objetivo del problema: Determinar el estado financiero justo antes de los 2 y 4 años
- elementos que hacen falta
- Más transiciones de los saltos la perdidos
- Valores exactos de las transiciones entre funciones
- Clarificación de los saltos en la gráfica

• Posible solución

- Para encontrar el estado financiero antes de los 2 años se evalúa la función cuadrática con $x=2$

$$f(2) = \frac{1}{2}(2)^2 - 3 = 2 - 3 = -1$$

entonces antes de los dos años la empresa tenía -1 millones de euros lo cual demuestra que va peor de lo esperado

Para los 4 años, la empresa como la función es lineal puede usarse la pendiente y multiplicarlo por 4

$$g(4) = \frac{19}{3} \times 4 = \frac{76}{3} = 25.33$$

Así que justo antes de los 4 años la empresa tenía 25.33 millones de euros

por lo que las ganancias parecen infinitas porque la función $h(x)$ sigue creciendo en lazoes f1 inversionista podría ganar dinero sin límite si sigue invirtiendo

Problema 7

Lluvia de ideas

Para conocer el estado financiero justo antes de los 2 años, uso la función cuadrática $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3$. Evaluando en $x=2$, obtengo $f(2) = -1$, lo que indica que la empresa aún tenía pérdidas de 1 millón de euros. Para los 4 años, uso la función lineal $g(x) = \frac{19}{3}x - \frac{19}{3}$. Sustituyendo $x=4$, obtengo $g(4) = 14$, lo que indica que la empresa ya tenía 14 millones de euros. Finalmente, para el límite de ganancias, analizo la función $h(x)$ que, a medida que x aumenta, la ganancia máxima parece estabilizarse en $\frac{7}{3}$ (aproximadamente 2.33 millones de euros).

Elementos con los que se cuentan en el problema

① Funciones definidas por intervalos

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3 \text{ para } 0 \leq x \leq 2 \text{ (cuadrática).}$$

$$g(x) = \frac{19}{3}x - \frac{19}{3} \text{ para } 2 \leq x < 4 \text{ (lineal).}$$

$$h(x) = (1 + \frac{1}{x})^x + \frac{7}{3} \text{ para } x \geq 4 \text{ (exponencial).}$$

② Condición inicial: la empresa comienza con un déficit de 3 millones de euros.

③ Objetivo del problema: Determinar el estado financiero justo antes de los 2 y 4 años, interpretar los saltos en la gráfica y analizar el límite de ganancias.

④ Estructura de la gráfica: Tres secciones con diferen-

tes tipos de crecimiento y cambios bruscos en las transiciones.

Elementos que hacen falta en el problema

① Valores exactos de las transiciones entre funciones (por ejemplo, $f(2)$ y $g(4)$).

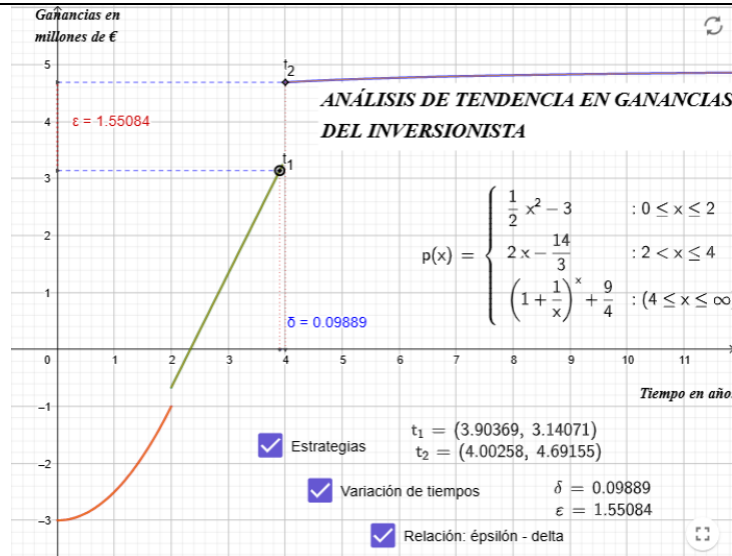
② Explicación detallada de qué representa la función $h(x)$ en términos financieros.

③ Clarificación sobre los saltos en la gráfica: ¿son eventos externos o cambios en la estrategia?

④ Restricciones adicionales en el dominio de $h(x)$ y su límite cuando $x \rightarrow \infty$.

Uso de Geogebra como herramienta didáctica para la comprensión del concepto de Límite

ENSAYO



Para ver el límite de ganancias observo la función $h(x)$, que está definida desde los 4 años en adelante. Como es una función decreciente, su límite parece estabilizarse en un valor finito. Al analizar la expresión veo que el término $\frac{1}{x}$ tiende a 0 conforme x crece, lo que sugiere que el valor máximo alcanzado es aproximadamente $\frac{1}{3}$, es decir, cerca de 2.33 millones de euros.

Fuente: Elaboración propia

Como se evidencia en la anterior figura, el grupo 1, nuevamente hace uso de elementos matemáticos inherentes a la solución de la situación omitiendo la conceptualización detallada de la relación con el límite en los cambios de función. Por su parte, en el grupo 2, se interacciona con la situación con el applet que se muestra en la parte inferior y da respuestas que implican el uso del concepto en el problema.

Ahora, en el problema 8

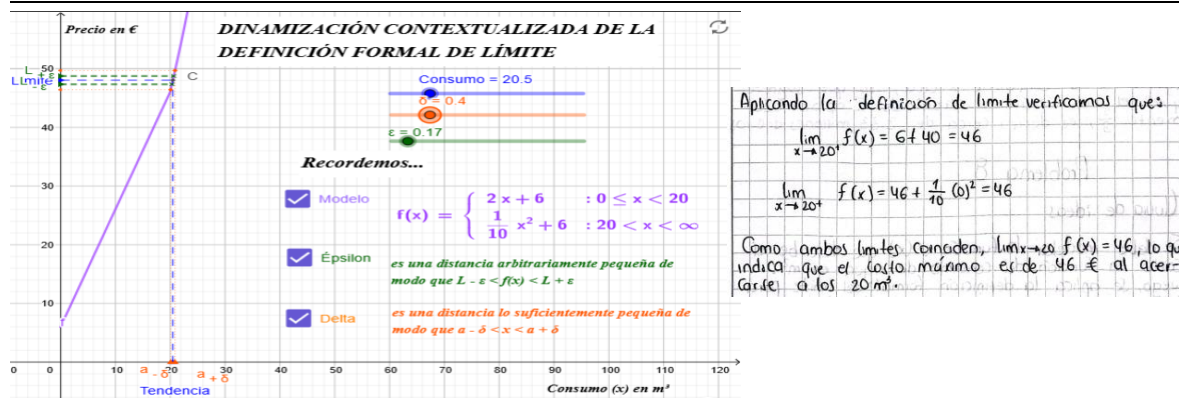
(<https://www.geogebra.org/m/dx4qcc7n#material/xzzvgjtz>), se llega al propósito del GeogebraBook, puesto que, se establece la definición formal de límite y se dinamiza en

ENSAYO

el applet, considerando el intervalo épsilon y delta alrededor de “a” y “L” respectivamente, dentro de un contexto cotidiano como es el de la tarifa del agua de acuerdo a su consumo en metros cúbicos. La figura 11 ilustra las respuestas de los estudiantes frente al planteamiento respectivo.

Figura 11. Respuestas al problema 8: Formalidad del límite.

Grupo 1	Grupo 2
Problema 8 • Nueva de ideas - Definir la función $f(x)$ que representa el costo en función del consumo - Usar la definición de límite para ver que pasa cuando x se acerca a 20 • Elementos que nos brinda el problema - Por expresiones para el costo una para consumos menores o iguales a 20 y otra para mayores a 20 - La función es $f(x) = \begin{cases} 6+2x & \text{si } x \leq 20 \\ 6+2(20) + \frac{1}{10}(x-20) & \text{si } x > 20 \end{cases}$ • Elementos que hacen falta - Aplicar el límite correctamente para ver continuidad • Posible solución - Aplicamos el límite en $x = 20$ $\lim_{x \rightarrow 20^-} f(x) = 6 + 2(20) = 46$ $\lim_{x \rightarrow 20^+} f(x) = 6 + 2(20) + \frac{1}{10}(20 - 20) = 46$ Al sustituyendo $x = 20$: $\lim_{x \rightarrow 20} f(x) = 6 + 2(20) + \frac{1}{10}(20 - 20) = 46$ Como los límites son iguales, concluimos que el costo es continuo en $x = 20$ y el precio máximo a pagar es 46 €	Problema 8 (Nueva de ideas) Se debe modelar la función $f(x)$ que describe el costo en función del consumo de agua en m^3. Luego, se aplica la definición formal del límite para determinar el costo máximo cuando tiende a $20 m^3$. Lo que se tiene y lo que no: Se tiene: • Tarifa fija de 6€ más 2€ por cada m^3. • Si el consumo excede de $20 m^3$, se usa la función tanfana dada: $\text{Tarifa fija} + \left(\frac{1}{10}\right)(m - 20)^2$ Falta determinar: • La expresión completa de la función $f(x)$. • Aplicar la definición de límite para analizar el comportamiento del costo cuando $x \rightarrow 20^+$ y $x \rightarrow 20^-$. Possible solución: Se define la función a trozos: $f(x) = \begin{cases} 6 + 2x, & \text{si } x \leq 20 \\ 6 + 2(20) + \frac{1}{10}(x - 20)^2, & \text{si } x > 20 \end{cases}$



Fuente: Elaboración propia

Como se muestra en las respuestas de los dos grupos, para el problema 8, es notorio que la parte procedimental, relacionada con el límite de funciones, logró comprenderse, puesto que, los procesos y razonamientos son apropiados. No obstante, para el grupo 2, se destaca el abordaje inicial del problema, con lo que se satisface el objetivo general de propiciar la comprensión conceptual del tópico. Por último, en la figura 12, se presentan las respuestas con relación al último de los problemas, para este (<https://www.geogebra.org/m/dx4qcc7n#material/xshpkjys>) se propone a los estudiantes una aplicación del concepto de límite como elemento de finalización para valorar su comprensión frente al tópico en cuestión.

Figura 12. Respuestas al problema 8: Aplicación del concepto.

Grupo 1

Grupo 2

Problema 9

- **Lluvia de ideas**
 - Verificar si $T(x)$ es continua en $x=30$
 - Determinar el valor de x para que $T(x) < 2$.
- **Elementos que nos brinda el problema**
 - Dos expresiones de la función $T(x)$, una para $0 \leq x < 30$ y otra para $x \geq 30$
 - Se quiere ver la función es continua y cuantos días son necesarios para $T(x) < 2$
- **Elementos que hacen falta**
 - Calcular los límites laterales correctamente
- **Posible solución**
 - a) Verificar continuidad

límite por la izquierda

$$\lim_{x \rightarrow 30^-} T(x) = \frac{300}{30+30} = \frac{300}{60} = 5$$

límite por la derecha

$$\lim_{x \rightarrow 30^+} T(x) = \frac{1125}{(30-5)(30-15)} + 2 = \frac{1125}{25 \times 15} + 2 = \frac{1125}{375} + 2 = 3 + 2 = 5$$

la función es continua en $x=30$
 - b) Encontrar el número el número de días para $T(x) < 2$
Planteamos la desigualdad

$$\frac{1125}{(x-5)(x-15)} + 2 < 2$$

Resolviendo $<$ en ambos lados

$$\frac{1125}{(x-5)(x-15)} < 0$$

Calculando el valor de x

$$\frac{1125}{(x-5)(x-15)} = 0$$

Resolviendo se obtiene $x=25$ por lo que con 25 días de entrenamiento el tiempo de la prueba es menor a 2 minutos.

Problema 9

Lluvia de ideas:

- Analizar si la función $T(x)$ es continua en todo su dominio, en particular en $x=30$, donde cambia su definición.
- Determinar cuantos días de entrenamiento son necesarios para que el tiempo de la prueba sea menor a 2 minutos (es decir, $T(x) < 2$).

Lo que se tiene y lo que no:

Se tiene:

- Dos expresiones para la función $T(x)$, una válida para $0 \leq x < 30$ y otra para $x \geq 30$.
- Se requiere verificar la continuidad en $x=30$, es decir, si $\lim_{x \rightarrow 30^-} T(x) = \lim_{x \rightarrow 30^+} T(x) = T(30)$.
- Se debe resolver $T(x) < 2$ para encontrar el número mínimo de días de entrenamiento.

Falta determinar:

- El valor de $\lim_{x \rightarrow 30^-} T(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 30^+} T(x)$.
- Resolver la ecuación $T(x) < 2$ para encontrar los valores de x que cumplen la condición.

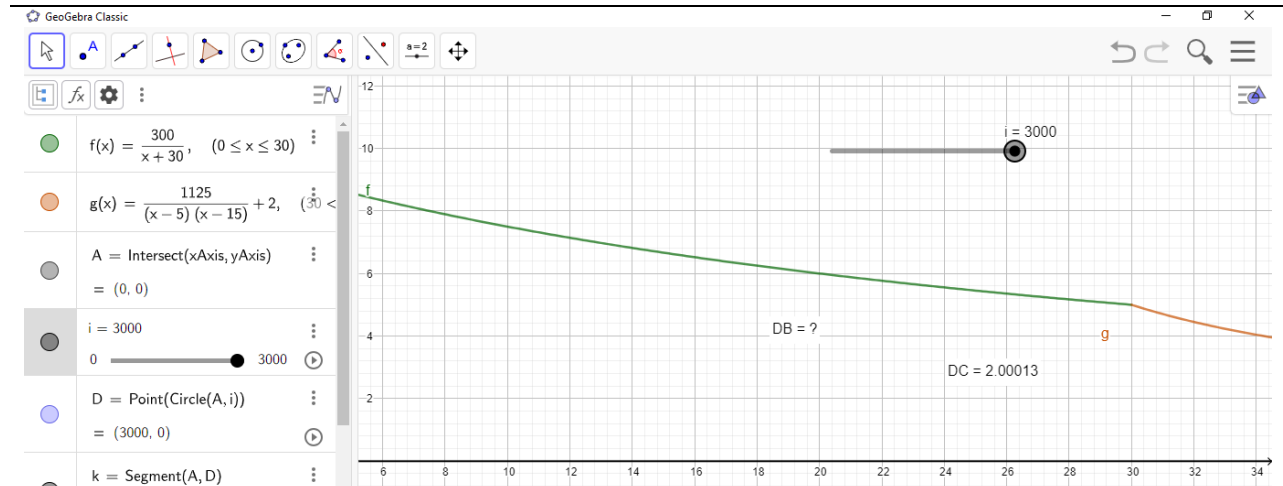
Posible solución:

- a) Verificar continuidad
 - Calculamos el límite por la izquierda:

$$\lim_{x \rightarrow 30^-} T(x) = \frac{300}{30+30} = \frac{300}{60} = 5$$
 - Calculamos el límite por la derecha usando la segunda función:

$$\lim_{x \rightarrow 30^+} T(x) = \frac{1125}{(30-5)(30-15)} + 2 = \frac{1125}{25 \times 15} + 2 = \frac{1125}{375} + 2 = 3 + 2 = 5$$

• Como ambos límites son iguales y coinciden con el valor de la función en $x=30$, la función es continua en todo su dominio.



Fuente: Elaboración propia

Con relación a la puesta en práctica del concepto de límite de una función, en este último problemas se evidencian aspectos muy interesantes que nutren y validan el desarrollo de los nueve problemas en estudiantes de grado undécimo, de este modo, en la anterior figura se deja un referente de cómo los estudiantes de un primer grupo, usan procesos matemáticos que desconocen la relevancia de instrumentos como geogebra para dinamizar y visualizar mejor la situación, de ese modo solucionan el problema erradamente y por otro lado los estudiantes del segundo grupo, los cuales inician con un análisis similar pero un tanto más estructurado en comparación con el grupo 1, dan muestra de la utilidad de la herramienta, de la concepción del límite como una aproximación óptima y plasman su conclusión usando el programa para dejar en claro que, por más que se entrene, en el contexto del ejercicio, no se logra reducir el tiempo a 2 minutos, ello se evidencia a poner un valor de 3000 en el deslizador y notar

que la función de tiempo da 2,00013 minutos.

Con respecto a la valoración de los problemas, en las tablas 4 a 6 se resumen los resultados en cuanto alcance de nivel de desempeño de los estudiantes de ambos grupos en los problemas 3,6 y 9. Se toman estos 3 como evidencia en el presente artículo, por ser los problemas de cierre de cada sección desde las tres perspectivas trabajadas; así, se establece la validación de desempeños de ambos grupos conforme a los niveles de las rúbricas los cuales se plantean de cara al propósito de comprensión en cada grupo de tres problemas que marcan el avance dentro del objetivo general de ir promoviendo la comprensión del límite de funciones incorporando el software Geogebra como herramienta didáctica.

Tabla 4. Rúbrica evaluativa: ¿Segmentos infinitamente pequeños?

Indicadores y criterios de evaluación	Nivel 1 Superior 4.5 - 5	Nivel 2 Alto 3.9 - 4.4	Nivel 3 Básico 3 - 3.8	Nivel 4 Bajo 1 - 2.9	$\bar{X}$ vel	Pu ntuación
Plantea interrogantes e hipótesis sobre el límite de áreas mediante el uso de Geogebra ⁴ .	Muestra habilidad para plantear interrogantes e hipótesis sobre el límite de áreas mediante el uso de Geogebra	Plantea interrogantes e hipótesis sobre el límite de áreas mediante el uso de Geogebra	Con algunas dificultades, plantea interrogantes e hipótesis sobre el límite de áreas mediante el uso de Geogebra	Presenta dificultades notables para plantear interrogantes e hipótesis sobre el límite de áreas mediante el uso de Geogebra		
Grupo						
1					A	
Grupo	X					

⁴ Se aclara que, para el grupo que no usó el software, este criterio se omite.

Uso de Geogebra como herramienta didáctica para la comprensión del concepto de Límite

ENSAYO

2						.5
	Soluciona problemas sobre límite de funciones de forma individual y cooperativa.	Es hábil para solucionar problemas sobre límite de funciones de forma individual y cooperativa	Soluciona problemas sobre límite de funciones de forma individual y cooperativa	Con algunas dificultades, soluciona problemas sobre límite de funciones de forma individual y cooperativa	No logra solucionar problemas sobre límite de funciones de forma individual ni cooperativa	
1	Grupo			X		.5
2	Grupo			X		
	Emplea responsablemente recursos tecnológicos para evaluar su propio aprendizaje.	De manera ejemplar, emplea responsablemente recursos tecnológicos para evaluar su propio aprendizaje	Emplea responsablemente recursos tecnológicos para evaluar su propio aprendizaje	Algunas veces emplea responsablemente recursos tecnológicos para evaluar su propio aprendizaje	No emplea responsablemente recursos tecnológicos para evaluar su propio aprendizaje	
1	Grupo		X			
Total						.2
2	Grupo		X			
Total						.8

Fuente: Elaboración propia

Con base a las evidencias presentadas por los estudiantes y, en general, desde la observación directa, se tiene que, como se muestra en la tabla 4, los estudiantes del grupo 1 alcanzan un nivel alto para el tercer problema, el cual sintetiza la noción de límite desde una perspectiva geométrica, aun así, se manifiesta dificultades para concebir el concepto de infinito, comparados con el grupo 2, quienes por su parte,

muestran una mejora notable en comparación, llegando al nivel 1: superior y abstrayendo concepciones más allá de la mera imaginación subjetiva, puesto que, pudieron manipular la noción del infinito mediante la transformación de los polígonos estructurados en los applets.

Tabla 5. Rúbrica evaluativa: Velocidad instantánea

Indicadores y criterios de evaluación	Nivel 1 Superior	Nivel 2 Alto	Nivel 3 Básico	Nivel 4 Bajo	Nota	Puntuación
	4.5 - 5	3.9 - 4.4	3 - 3.8	1 - 2.9		
Plantea interrogantes e hipótesis sobre el límite de velocidades mediante el uso de Geogebra.	Muestra habilidad para plantear interrogantes e hipótesis sobre el límite de velocidades mediante el uso de Geogebra	Plantea interrogantes e hipótesis sobre el límite de velocidades mediante el uso de Geogebra	Con algunas dificultades, plantea interrogantes e hipótesis sobre el límite de velocidades mediante el uso de Geogebra	Presenta dificultades notables para plantear interrogantes e hipótesis sobre el límite de velocidades mediante el uso de Geogebra		
Grupo 1					A	
Grupo 2		X				
Soluciona problemas sobre límite de funciones de forma individual y	Es hábil para solucionar problemas sobre límite de funciones de forma individual	Soluciona problemas sobre límite de funciones de forma individual y cooperativa	Con algunas dificultades, soluciona problemas sobre límite de funciones de forma individual y	No logra solucionar problemas sobre límite de funciones de forma individual		

Uso de Geogebra como herramienta didáctica para la comprensión del concepto de Límite

ENSAYO

cooperativa.		y cooperativa		cooperativa		ni cooperativa			
1	Grupo			X		.6			
2	Grupo			X		.2			
Emplea responsablemente recursos tecnológicos para evaluar su propio aprendizaje.		De manera ejemplar, emplea responsablemente recursos tecnológicos para evaluar su propio aprendizaje		Emplea responsablemente recursos tecnológicos para evaluar su propio aprendizaje		Algunas veces emplea responsablemente recursos tecnológicos para evaluar su propio aprendizaje		No emplea responsablemente recursos tecnológicos para evaluar su propio aprendizaje	
1	Grupo		X						
Total							.3		
2	Grupo		X						
Total							.4		

Fuente: Elaboración propia

Para esta segunda sección de problemas, que se cierra con el problema de la velocidad instantánea propuesto para la perspectiva algebraica – aritmética, en la tabla 5 se evidencia en los grupos, de acuerdo a la rúbrica evaluativa y evidencias de aprendizaje, un aumento en la confusión respecto a la comprensión del concepto *per se*, no obstante, considerando la complejidad de los tres problemas propuestos, en el grupo 2, gracias al applet usado para el grupo de los tres problemas, se logra una mejor asimilación de lo que se entendería después como la recta tangente a la curva

ENSAYO

de distancia vs tiempo. Al final, debe mencionarse, como lo ilustra la tabla, que ambos grupos llegan a un nivel 2: alto.

Tabla 6. Rúbrica evaluativa: Aplicación del concepto

Indicadores y criterios de evaluación	Nivel 1 Superior	Nivel 2 Alto	Nivel 3 Básico	Nivel 4 Bajo	Nivel	Puntuación
	4.5 - 5	3.9 - 4.4	3 - 3.8	1 - 2.9		
Plantea interrogantes e hipótesis sobre el concepto de límite de una función mediante el uso de Geogebra.	Muestra habilidad para plantear interrogantes e hipótesis sobre el concepto de límite de una función mediante el uso de Geogebra	Plantea interrogantes e hipótesis sobre el concepto de límite de una función mediante el uso de Geogebra	Con algunas dificultades, plantea interrogantes e hipótesis sobre el concepto de límite de una función mediante el uso de Geogebra	Presenta dificultades notables para plantear interrogantes e hipótesis sobre el concepto de límite de una función mediante el uso de Geogebra		
Grupo					A	
1						
Grupo	X					.5
2						
Soluciona problemas sobre límite de funciones de forma individual y cooperativa.	Es hábil para solucionar problemas sobre límite de funciones de forma individual y cooperativa	Soluciona problemas sobre límite de funciones de forma individual y cooperativa	Con algunas dificultades, soluciona problemas sobre límite de funciones de forma individual y cooperativa	No logra solucionar problemas sobre límite de funciones de forma individual ni cooperativa		
Grupo			X			.3
1						
Grupo	X					.6
2						
Emplea responsablemente recursos tecnológicos para evaluar su propio aprendizaje.	De manera ejemplar, emplea responsablemente recursos tecnológicos para evaluar su propio aprendizaje	Emplea responsablemente recursos tecnológicos para evaluar su propio aprendizaje	Algunas veces emplea responsablemente recursos tecnológicos para evaluar su propio aprendizaje	No emplea responsablemente recursos tecnológicos para evaluar su propio aprendizaje		

Uso de Geogebra como herramienta didáctica para la comprensión del concepto de Límite

ENSAYO

1	Grupo	X	
Total			.1
2	Grupo	X	
Total			.7

Fuente: Elaboración propia

Para éste último problema que busca la puesta en práctica de las nociones interiorizadas en los problemas previos, se deja en evidencia, de acuerdo a la tabla 6, la dificultad inherente a su comprensión por parte del grupo 1 y, en el grupo 2, en medio de la complejidad propia del concepto, se puede resaltar que el uso del software y los applet para dinamizar situaciones, potenció la posibilidad de analizar más detalladamente funciones y tendencias; así, es de anotar que los desempeños de este segundo grupo mejoraron con el uso de la herramienta didáctica y trajeron como repercusión benéfica, el entendimiento inicial y comprensión final de este estructurado concepto.

Conclusiones

Con relación al primero de los objetivos, en el presente artículo luego de un análisis de trabajos en los que se aplican y estudian distintos software para el trabajo matemático como Maple, Derive y Cabri Geometry se destaca el uso del software Geogebra en comparación con sus homólogos, debido principalmente a su carácter libre, a sus bondades en el interfaz que permiten su uso de manera intuitiva y, además, por su versatilidad, ya que, sus funciones no se limitan al uso de la aplicación, sino que, se cuenta con el recurso desde su website. En adición, el software sobresale por ser compatible con la creación de estrategias pedagógicas avanzadas como es el caso del GeogebraBook con la incorporación de applets que pueden manipularse desde cualquier dispositivo electrónico con acceso a internet.

Por otro lado, desde la consideración de la fenomenología y a través de un examen crítico de los desafíos epistemológicos inherentes a la noción matemática de límite de funciones, emergen tres elementos clave para la labor docente, a saber, 1. reconocer la

Uso de Geogebra como herramienta didáctica para la comprensión del concepto de Límite

ENSAYO

naturaleza multifacética de estos conceptos y su complejidad inherente, 2. abordar las barreras estrictamente relacionadas con los enfoques pedagógicos tradicionales, y 3. responder a la diversidad cognitiva y contextual de los estudiantes en el aula. Esta tríada justifica la necesidad de desarrollo de marcos de enseñanza innovadores. Así, presentar los conceptos como entidades estáticas divorciadas de su génesis histórica y procesos de estructuración conceptual, crea obstáculos epistemológicos que dificultan una comprensión significativa. Por lo tanto, se promueve un enfoque diacrónico que incorpore: análisis histórico-epistemológico, y fenomenología del concepto, como fundamento para el diseño de secuencias didácticas mejor fundamentadas.

Consecuentemente, la construcción del concepto de límite de una función estriba, para el presente trabajo, desde 3 perspectivas claras [geométrica, algebraica, aritmética y analítica], que recogen hitos como el método de exhaustión, la noción de infinito, la velocidad instantánea y, por último, la definición conceptual. También, con el propósito de diseñar y aplicar una propuesta que permita la comprensión del concepto, el presente artículo enfatiza la relevancia de la incorporación de herramientas TIC, particularmente Geogebra, en la elaboración de propuestas didácticas orientadas a la aprehensión del concepto de límite de funciones.

Lo anterior debido a la capacidad del software para dinamizar objetos matemáticos a través de la manipulación interactiva que ofrece esta y otras herramientas; con ello, se permite trascender su abstracción intrínseca, promoviendo así su asimilación y aplicabilidad en variados contextos. Dicha estrategia pedagógica contrasta de forma

ENSAYO

precisa con los métodos convencionales de enseñanza, ilustrados en el Grupo 1 del estudio, cuyo uso se limitó al tablero y el marcador, los cuales demostraron generar restricciones en la construcción de nociones matemáticas necesarias en el logro de una comprensión conceptual significativa sobre el límite de una función.

Por último, se logra una mejor disposición por parte de los estudiantes para llevar a cabo actividades curriculares relacionadas con un tópico abstracto y trascendente para el estudio del análisis matemático. De esta manera, se promueve la comprensión, mediante la reflexión y manipulación de elementos inherentes a cada problema y encaminados a la construcción del concepto, partiendo desde la intuición hasta llegar a la formalidad del mismo y, conforme al análisis de los desempeños de los dos grupos de estudio, se establece que, la propuesta, no solo permitió mejorar procesos de enseñanza – aprendizaje, sino que, además, se cumplió con el propósito esencial que fue promover la comprensión del concepto.

Referencias

- Alzate, E., Montes, J., Escobar, R., (2013). Diseño de actividades mediante la metodología ABP para la Enseñanza de la Matemática. *Scientia et Technica* Año XVIII, Vol. 18, No. 3, pp. 542-547. <https://doi.org/10.22517/23447214.8341>
- Barallobres, G. (2017). Ciertos fenómenos didácticos que caracterizan las dificultades de aprendizaje en la transición de la aritmética al álgebra en la escuela secundaria. *Unión-Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 13(51). <https://revistaunion.org.fespm.es/index.php/UNION/article/-view/384>
- Bejarano, M., Lirio, J., Martínez, A., Manzanares, A., Palomares, M^a., Rodríguez, L. y Villa, N. (2015). *El aprendizaje basado en problemas, una propuesta metodológica en educación superior*. Narcea ediciones. <https://n9.cl/w48f>
- Bernal, C. A. (2006). Metodología de la investigación. Pearson educación. <http://up-rid2.up.ac.pa:8080/xmlui/handle/123456789/1485>
- Blázquez, S. y Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, Vol 4, Núm. 3. Pp. 219-236. <https://documat.unirioja.es/descarga/articulo/2147876.pdf>
- Blázquez, S. y Ortega, T. (2002). Nueva definición de límite funcional. *UNO*, 30, pp. 67-82. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=260158>
- Bressan, A., Zolkower, B. y Gallego, F. (2004). *La educación matemática realista*. Principios en que se sustenta. Escuela de invierno en didáctica de la matemática. http://www.gpdmaticas.org.ar/publicaciones/articulo_escuela_invierno2.pdf
- Brousseau, G. (1989). Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques. *Construction des savoirs, obstacles et conflits*, 41-63. <https://hal.science/hal-00516581/>
- Cruz, M. (2006): *La enseñanza de la Matemática a través de la Resolución de Problemas*. Tomo 1 La Habana: Educación Cubana
- D'Amore, B. & Zan, R. (1996) Italian research on problem solving 1988–1995. In A. Gagatsis & L. Rogers (Eds.): *Didactic and History of Mathematics* (p. 39). Thessaloniki
- Freudenthal, H. (1983). Didactical phenomenology of mathematical structures [Electronic resource]. <https://www.sidalc.net/search/Record/KOHA-OAI-TEST:212553/Description>
- Gutiérrez-Gonzalez, J., Morales-Maure, L., Campos-Nava, M., Crespo, J. y Mansilla-Sepúlveda, J. (2019). Visualizando los límites de funciones y las derivadas con geometría dinámica. *Opción*, Año 35, Regular No.90, pp. 607-667.

ENSAYO

- Hidalgo, H., Mera, E., López, J. y Patiño, L. (2015). Aprendizaje basado en problemas como potencializador del pensamiento matemático. *Plumilla Educativa*, Vol. 15, Nº. 1. pp. 299-312. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5920332>
- Leiva, F. (2016). ABP como estrategia para desarrollar el pensamiento lógico matemático en alumnos de educación secundaria. *Sophia: Colección de Filosofía de la Educación*, Nº. 21. pp. 209-224. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5973046>
- Mora, O. (2012). Diseño de herramientas didácticas en ambientes virtuales de aprendizaje mediante unidades de aprendizaje integrado en matemáticas. Tesis (Maestría)
- Morales, P. y Landa, V. (2004). APRENDIZAJE BASADO EN PROBLEMAS. *Theoria*, Vol. 13., pp. 145-157. <http://biblioteca.udgvirtual.udg.mx/jspui/handle/123456789/574>
- Pons, J. (2014). *Análisis de la comprensión en estudiantes de bachillerato del concepto de Límite de una función en un punto* [Tesis Doctoral, Universidad de Alicante]. Archivo digital. https://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/45713/1/tesis_pons_tomas.pdf
- Posso, A., Uzuriaga, V. y Del Carmen, J. (2007). Dificultades que aparecen en el proceso enseñanza-aprendizaje de la matemática al pasar del bachillerato a la universidad. *Scientia et Technica*, Vol. 2 Núm. 34. Pp. 495-499. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4810869>
- Rendón Mayorga, C. G. (2017). *Diseño de tareas mediadas por la historia del concepto de límite dirigidas a la formación del profesor de Matemáticas*. [Tesis de Maestría], Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia. <http://repository.pedagogica.edu.co/handle/20.500.12209/9457>
- Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En Rico, L., Castro, E., Coriat, M., Puig, L., Sierra, M. y Socas, M. (Eds.). *La educación matemática en la enseñanza secundaria*, 125-154. Barcelona: ICE Universitat de Barcelona- Horsori. <https://laurabrichetti.files.wordpress.com/2010/12/socas-robayna-dificultades-errores-y-obstaculos-en-el-aprendizaje-de-la-matematica.pdf>
- Toledo, F. (2017). *La Topología De Espacios Métricos Animada Con Geogebra*. [Tesis de maestría, Universidad Tecnológica de Pereira]. Archivo digital. <http://repositorio.utp.edu.co/dspace/handle/11059/8697>
- Trujillo, J., Vera, C. y Prada, R. (2017). Estado Del Arte Sobre El Concepto De Límite [Congreso]. *II encuentro internacional en educación matemática*. Cúcuta, Colombia. https://ww2.ufps.edu.co/public/archivos/oferta_academica/8c86ed0111abd2ac61fa2f8fc7d99448.pdf#page=165